

Задача 1. Расставьте дроби $\frac{4}{5}$, $\frac{15}{19}$, $\frac{19}{24}$ в порядке возрастания и объясните ваш ответ.

Ответ: $\frac{15}{19} < \frac{19}{24} < \frac{4}{5}$.

Решение.

Первый способ. Заметим, что $\frac{15}{19} = 1 - \frac{4}{19}$, $\frac{19}{24} = 1 - \frac{5}{24}$, $\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$. Для доказательства того, что дроби расположены в правильном порядке, достаточно проверить неравенства $\frac{4}{19} > \frac{5}{24} > \frac{1}{5}$. Первое выполнено, поскольку $4 \cdot 24 = 96 > 95 = 5 \cdot 19$, второе — поскольку $5 \cdot 5 = 25 > 24 = 1 \cdot 24$.

Второй способ. Общий знаменатель дробей равен $5 \cdot 19 \cdot 24 = 2280$. $\frac{15}{19} = \frac{1800}{2280}$, $\frac{19}{24} = \frac{1805}{2280}$, $\frac{4}{5} = \frac{1824}{2280}$ ■

Критерии:

1. +: Дроби приведены к общему знаменателю, все верно.
2. +.: Мелкие описки, по сути все верно.
3. \pm : Проверено только одно из неравенств или указано, что надо привести дроби к общему знаменателю, но приведения нет.
4. \mp : Дроби расставлены в верном порядке, но без обоснования.

Задача 2. Требуется приготовить 2 яйца всмятку и 4 яйца вкрутую. Яйцо всмятку варится 2 минуты, а вкрутую — 4 минуты (яйца кладут в кипящую воду). За какое наименьшее время это можно сделать, если есть кастрюлька с кипящей водой вместимостью 4 яйца? (Не забудьте объяснить, как сварить яйца за найденное вами время и почему сварить яйца быстрее не получится.)

Решение. Посчитаем количество «яйцeminут» — отрезков времени длиной в минуту, когда варится одно яйцо, — которые нужно затратить, чтобы сварить все яйца. Получим $2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 20$ «яйцeminут». Заметим, что производительность кастрюли — четыре «яйцeminуты» в минуту. Соответственно, быстрее, чем за пять минут (20 «яйцeminут» разделить на 4) мы не управимся.

Приведем пример, как это можно сделать за 5 минут.

Первый способ. Положим в кастрюлю первые 4 яйца (они будут вариться вкрутую) и будем варить 3 минуты. В момент, когда 3 минуты пройдут, вытащим пару яиц и положим в кастрюлю 2 яйца, которые будут вариться всмятку. Ещё спустя минуту вытащим пару яиц, которые сварились вкрутую, и заменим на пару недоваренных вкрутую яиц, которую мы вытаскивали. Ещё через минуту они доварятся, а заодно приготовятся и яйца всмятку.

Второй способ. Обозначим яйца буквами А, Б, В, Г, Д и Е. Сначала опустим четыре яйца А, Б, В и Г. Яйца А и Б достанем через минуту и отложим в сторону. На освободившиеся два места положим яйца Д и Е. Их мы варим до конца (то есть еще 4 минуты), а яйца В и Г вытащим через четыре минуты после начала варки (через три минуты после того, как А и Б были заменены на Д и Е). На их место положим довариваться А и Б в течение одной минуты. Через минуту вытащим все яйца (А, Б, Д и Е). В итоге яйца А и Б варились 2 минуты (одну сначала и одну потом), они сварены всмятку, а В, Г, Д и Е — по 4 минуты, они сварены вкрутую, а всего потрачено 5 минут. ■

Критерии:

1. +: Приведен алгоритм и показано, что быстрее нельзя.
2. \pm : Только верный алгоритм за 5 минут, но нет объяснения, почему нельзя быстрее.
3. —: Только верный алгоритм за 6 минут.

Задача 3. Каждому трёхзначному числу, в записи которого участвуют только цифры 1, 2, 3, сопоставили одну из букв А, Б, В по таким правилам:

- 1) числу 111 сопоставили букву А;
 - 2) числу 222 сопоставили букву Б;
 - 3) числу 133 сопоставили букву А;
 - 4) если два числа различаются во всех разрядах, то им сопоставили разные буквы.
- а) Какую букву по этим правилам сопоставили числу 333?
б) А какую — числу 123? Не забудьте обосновать ответы.

Ответ: а) В; б) А.

Решение. 333 различается во всех разрядах и с числом 111, и с числом 222. Соответственно, числу 333 сопоставлена не А и не Б, то есть В. Числу 311 сопоставлена буква В, поскольку оно различается во всех разрядах и с числом 133 (А), и с числом 222 (Б). Числу 232 сопоставлена буква Б, поскольку оно различается во всех разрядах и с числом 111 (А), и с числом 311 (В). А тогда числу 123 сопоставлена буква А, поскольку оно различается во всех разрядах и с числом 311 (В), и с числом 232 (Б). ■

Критерии:

1. +: Верный ответ с полным обоснованием.
2. ∓: Только верный ответ, верного обоснования нет.

Задача 4. Докажите неравенство ТРИ · ШЕСТЬ < ТРИДЦАТЬ, где каждая буква обозначает цифру, причём разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые

Решение. Заметим, что число ТРИДЦАТЬ больше, чем число ТРИ00000, а число ШЕСТЬ меньше, чем 100000. Значит, ТРИ · ШЕСТЬ < ТРИ · 100000 = ТРИ00000 < ТРИДЦАТЬ. ■

Критерии:

1. +: Верное решение.
2. ∓: Рассмотрен случай, когда ТРИ — максимум из возможных чисел или ТРИДЦАТЬ — минимум.

Задача 5. На каждой клетке доски 8×8 стоит кубик $1 \times 1 \times 1$. У каждого кубика одна грань чёрная, а остальные — белые. За один ход разрешается проткнуть спицей целиком один ряд (строку или столбец), вынуть его, повернуть вокруг спицы, вставить обратно и вытащить спицу. Всегда ли можно за несколько таких ходов повернуть все кубики чёрными гранями вверх, как бы они не были расставлены изначально?

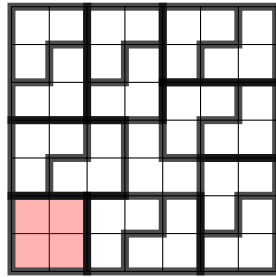
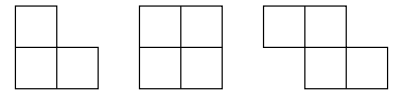
Ответ: Да, всегда можно.

Решение. Покажем, как повернуть любой один кубик черной гранью вверх, не поменяв положения остальных. Возьмем любой кубик, который еще не повернут черной гранью вверх. Его можно поставить правильно, повернув либо столбец, в котором лежит этот кубик, либо строчку. Пусть, для определённости, строчку. Тогда проткнем эту строчку и повернём кубик чёрной гранью вверх. После этого проткнем столбец и повернём на четверть оборота в любую сторону. Теперь кубик лежит черной гранью набок, и вращение строки не меняет положения черной грани. Воспользуемся этим и повернём строчку, в которой лежит наш кубик, в исходное положение. А затем повернём в исходное положение столбец с этим кубиком. В результате кубик лежит чёрной гранью вверх, а все остальные кубики мы вернули в исходное положение. Осталось последовательно повернуть каждый кубик в нужное нам положение, используя этот алгоритм. ■

Критерии:

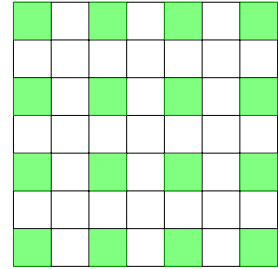
1. +: Верное решение.
 2. ±: Верная идея решения, не доведенная до конца, либо реализованная с ошибкой.
-

Задача 6. Квадрат 7×7 разрезали на части, среди которых не встречается никаких других фигурок, кроме изображённых на рисунке (возможно, повернутых или перевёрнутых). **а)** Приведите пример такого разрезания. **б)** Докажите, что в любом таком разрезании встречается ровно одна четырёхклеточная фигурка.



Решение. а) Например, так:

б) Раскрасим нашу доску 7×7 так, как показано на рисунке справа. Закрашенных клеток на ней ровно 16. Заметим, что любая из трёх данных фигурок закрывает не более одной закрашенной клетки, и следовательно, нужно не менее 16 фигурок. Но в каждой фигурке минимум 3 клетки, что уже даёт минимум $16 \cdot 3 = 48$ клеток из имеющихся 49. Значит, фигурок ровно 16, и оставшаяся клетка принадлежит ровно одной из этих фигурок, которая и будет единственной четырёхклеточной. ■



Критерии:

1. +: Верное решение.
 2. ∓: доказано, что не менее одной четырёхклеточной фигурки.
-