

**Задача 1.** Докажите, что Ваше 28-летие будет в такой же день недели, в какой Вы родились.

**Определение 1.** Пусть  $a$  и  $b$  — целые числа, причём  $b \neq 0$ . Говорят, что  $a$  *делится на*  $b$ , если существует такое целое число  $c$ , что  $a = bc$ . В этом случае говорят, что  $a$  *кратно* числу  $b$ ; число  $b$  называется *делителем* числа  $a$ , число  $c$  называется *частным* от деления  $a$  на  $b$ .

Обозначение:  $a : b$  ( $a$  делится на  $b$ ) или  $b \mid a$  ( $b$  делит  $a$ ).

**Задача 2.** Докажите, что любые целые числа удовлетворяют следующим свойствам:

**а)** если  $a:c$  и  $b:c$ , то  $(a \pm b):c$ ; **б)** если  $a:c$  и  $b$  — произвольное целое число, то  $ab:c$ ;

в) если  $a:b$  и  $b:c$ , то  $a:c$ ; г) если  $a:b$ , то либо  $a=0$ , либо  $|a| \geq |b|$ ;

д) если  $a \div b$  и  $b \div a$ , то  $|a| = |b|$ .

**Задача 3.** Верно ли, что любые целые числа удовлетворяют следующим свойствам:

а) если  $a:c$  и  $b \nmid c$ , то  $(a+b) \nmid c$ ; б) если  $a:b$  и  $b \nmid c$ , то  $a \nmid c$ ; в) если  $a \nmid b$  и  $b:c$ , то  $a \nmid c$ ;

г) если  $a \nmid c$  и  $b \nmid c$ , то  $ab \nmid c^2$ ; д) если  $a : c$ ,  $b : c$ , то для любых целых  $x$  и  $y$  выполнено  $(ax + by) : c$ ?

**Задача 4.** Пусть  $m, n$  — целые, и  $5m + 3n : 11$ . Докажите, что а)  $6m + 8n : 11$ ; б)  $9m + n : 11$ .

**Задача 5.** Докажите, что если  $(a^2 + b^2) : 3$ , то  $a : 3$  и  $b : 3$ .

**Задача 6.** Докажите, что а)  $\overline{aaa}$  делится на 37; б)  $\overline{abc} - \overline{cba}$  делится на 99 (где  $a, b, c$  — цифры).

**Задача 7.** а) Докажите, что целое число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, делящееся на 4.

б) Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2, 5, 8, 10.

**Задача 8.** а) Из натурального числа  $\overline{a_n \dots a_1 a_0}$  вычли сумму его цифр  $a_n + \dots + a_1 + a_0$ . Докажите, что получилось число, делящееся на 9. б) Выведите из пункта а) признаки делимости на 3 и на 9.

**Задача 9.** Докажите, что число, составленное из 81 единицы, делится на 81.

**Задача 10.** Докажите, что целое число  $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$  делится на 11 если и только если знакопеременная сумма его цифр  $(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n)$  делится на 11.

**Задача 11\*.** Сформулируйте и докажите признак делимости на 7.

**Задача 12.** Докажите, что  $m(m+1)(m+2)$  делится на 6 при любом целом  $m$ .

**Задача 13.** Числа  $a, b, c, d$  — натуральные. Обязательно ли число  $\frac{(a+b+c+d)!}{a!b!c!d!}$  целое?

**Задача 14.** Докажите, что произведение  $n$  подряд идущих целых чисел делится на  $n!$ .

**Задача 15.** Целые числа  $a$  и  $b$  различны. Докажите, что  $(a^n - b^n) : (a - b)$  при любом натуральном  $n$ .

**Задача 16.** Найдите все целые  $n$ , при которых число  $(n^3 + 3)/(n + 3)$  целое.

**Задача 17.** Решите в натуральных числах уравнения: а)  $x^2 - y^2 = 31$ ; б)  $x^2 - y^2 = 303$ .

**Задача 18.** Может ли  $n!$  оканчиваться ровно на 4 нуля? А ровно на 5 нулей?

1	2 <sub>a</sub>	2 <sub>b</sub>	2 <sub>v</sub>	2 <sub>r</sub>	2 <sub>d</sub>	3 <sub>a</sub>	3 <sub>b</sub>	3 <sub>v</sub>	3 <sub>r</sub>	3 <sub>d</sub>	4 <sub>a</sub>	4 <sub>b</sub>	5	6 <sub>a</sub>	6 <sub>b</sub>	7 <sub>a</sub>	7 <sub>b</sub>	8 <sub>a</sub>	8 <sub>b</sub>	9	10	11	12	13	14	15	16	17 <sub>a</sub>	17 <sub>b</sub>	18

