

Мы будем обозначать расстояние между точками  $A$  и  $B$  плоскости через  $d(A, B)$ . Напомним основные свойства расстояния:

- $d(A, B) \geq 0$ , причём равенство достигается тогда и только тогда, когда  $A = B$ ;
- $d(A, B) = d(B, A)$ ;
- $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ , причём равенство достигается тогда и только тогда, когда точка  $B$  лежит на отрезке  $AC$  («неравенство треугольника»).

**Определение 1.** *Движением плоскости* называется взаимно однозначное отображение  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  плоскости на себя, которое сохраняет расстояния, т. е.

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^2 \quad d(A, B) = d(f(A), f(B)).$$

**Задача 1.** а) Покажите, что если  $f$  — движение, то обратное отображение  $f^{-1}$  — тоже движение. б) Если  $g$  — ещё одно движение, то композиция  $f \circ g$  — снова движение. в) Выведите основные свойства движений: движения переводят прямые в прямые, окружности — в окружности; движения сохраняют параллельность и углы между прямыми и окружностями. г)\* Докажите, что условие взаимной однозначности в определении 1 является излишним.

**Определение 2.** *Центральная симметрия с центром в точке  $O$*  — это такое отображение плоскости на себя, при котором точка  $O$  переходит в себя, а всякая другая точка  $X$  переходит в такую точку  $X'$ , что  $O$  есть середина отрезка  $XX'$ .

**Задача 2.** Двое игроков выкладывают по очереди на прямоугольный стол пятаки. Монету разрешается класть только на свободное место. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

**Задача 3.** Докажите, что

- а) центральная симметрия — движение;
- б) если некоторая фигура<sup>1</sup> имеет два центра симметрии, то их у неё бесконечно много.

**Задача 4.** а) Дан вписанный четырёхугольник. Через середину каждой его стороны провели прямую, перпендикулярную противоположной стороне. Докажите, что проведённые прямые пересекаются в одной точке. б) Пусть у выпуклого  $n$ -угольника нет параллельных сторон,  $A$  — некоторая точка, не лежащая на сторонах многоугольника. Докажите, что тогда существует не более  $n$  отрезков с концами на сторонах многоугольника и с серединой в  $A$ .

**Определение 3.** *Осевая (или зеркальная) симметрия относительно прямой  $l$*  — это такое отображение плоскости на себя, при котором точки прямой  $l$  остаются на месте, а всякая точка  $X$ , не лежащая на этой прямой, переходит в такую точку  $X'$ , что  $l$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $XX'$ .

**Задача 5.** Стёпа хочет половить навагу в Баренцевом море, а селёдку — в Белом. Как следует ему выбрать кратчайший путь с началом и концом на станции Хибины, если Кольский полуостров имеет форму а) острого угла; б)\* тупого угла?

**Задача 6.** Докажите, что

- а) осевая симметрия — движение;
- б) если некоторое движение оставляет все точки прямой неподвижными, то это либо тождественное отображение, либо симметрия относительно этой прямой;
- в)\* угол между двумя осями симметрии многоугольника имеет рациональную градусную меру.

**Задача 7.** По одну сторону от прямой  $l$  расположены точки  $A$  и  $B$ . Постройте такую точку  $X$  на прямой  $l$ , что углы между  $AX$  и  $BX$  и прямой  $l$  а) равны; б)\* отличаются в два раза.

<sup>1</sup>Фигурой в геометрии принято называть произвольное множество точек на плоскости.

[illegible]