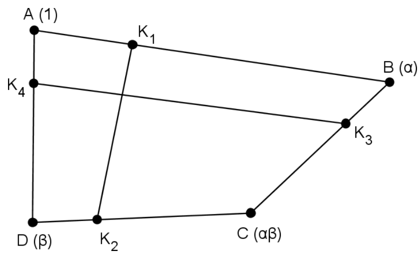
Задача 1. Пусть $ABCD$ — пространственный четырёхугольник. Точки K_1 и K_2 делят соответственно стороны AB и DC в отношении α; точки K_3 и K_4 делят соответственно стороны BC и AD в отношении β. Докажите, что отрезки K_1K_2 и K_3K_4 пересекаются.

Решение. Разместим в вершинах A, B, C, D массы 1, α, $\alpha\beta$, β соответственно. Тогда центр масс отрезка AB находится в точке K_1; отрезка DC — в точке K_2. Значит, центр масс всего четырёхугольника лежит на отрезке K_1K_2. С другой стороны, центр масс отрезка BC находится в точке K_3; отрезка AD — в точке K_4. Поэтому центр масс всего четырёхугольника принадлежит отрезку K_3K_4. Отсюда следует, что отрезки K_1K_2 и K_3K_4 имеют общую точку (центр масс $ABCD$). ■



Задача 2. Докажите, что не существует попарно различных натуральных чисел a, b, c, d, для которых было бы справедливо соотношение $a^a + b^b = c^c + d^d$.

Решение. Предположим, что такие числа существуют. Без ограничения общности можно считать, что a — самое большое из них. Очевидно, что в этом случае $a > 2$ и $a - 1 \geqslant c$, $a - 1 \geqslant d$. Отсюда получаем неравенство $a^a + b^b > a^a = a \cdot a^{a-1} > 2a^{a-1} > 2(a-1)^{a-1} \geqslant c^c + d^d$. Противоречие. ■

Задача 3. В турнире участвовало 20 футбольных команд. В первый день все команды сыграли по одной игре. Во второй также все команды сыграли по одной игре. Докажите, что после второго дня можно указать такие 10 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются команды, а рёбрами — прошедшие игры. При этом все рёбра раскрашены в два цвета в зависимости от того, в какой из дней была сыграна соответствующая игра. Тогда из каждой вершины выходит ровно по одному ребру каждого цвета. Значит, граф является объединением нескольких простых циклов. Покажем, что все они имеют чётную длину. Действительно, при обходе вдоль цикла цвета рёбер должны чередоваться. Такое возможно, только если их чётное количество.

Теперь из каждого цикла можно выбрать ровно половину вершин (идущих через одну) — все они будут попарно несмежные. И полное их количество равно половине от общего числа вершин, то есть 10. Утверждение доказано. ■

Задача 4. В таблице

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 9 \\ 9 & 0 & 1 & \cdots & 8 \\ 8 & 9 & 0 & \cdots & 7 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

отмечено 10 чисел так, что в каждой строке и в каждом столбце отмечено ровно одно число. Докажите, что среди отмеченных чисел есть хотя бы два равных.

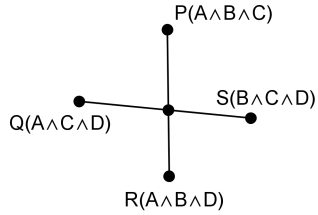
Решение. Пусть i-ое отмеченное число равно a_i и находится на пересечении строки с номером y_i и столбца с номером x_i. Для приведённой таблицы выполняется равенство $a_i \equiv x_i - y_i \mod 10$.

По условию задачи все числа $\{x_i\}$ попарно различны и все числа $\{y_i\}$ попарно различны. Поэтому $\{x_i\} = \{y_i\} = \{1, 2, \ldots, 10\}$ и $\sum a_i \equiv \sum (x_i - y_i) \equiv \sum x_i - \sum y_i \equiv 0 \mod 10$.

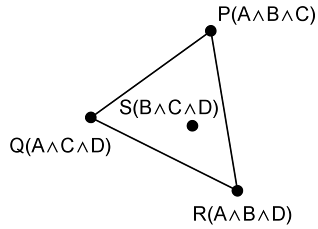
Значит, $\{a_i\} \neq \{1, 2, \ldots, 10\}$ (так как $1 + 2 + \ldots + 10 = 55 \equiv 5 \mod 10$) и отмеченные числа не могут быть попарно различны. ■

Задача 4′. На плоскости нарисованы четыре выпуклые фигуры, любые три из которых пересекаются. Докажите, что все четыре фигуры тоже пересекаются.

Решение. Пусть A, B, C, D — те самые четыре множества. По условию мы знаем, что найдутся точки $P \in A \cap B \cap C$, $Q \in A \cap C \cap D$, $R \in A \cap B \cap D$, $S \in B \cap C \cap D$.



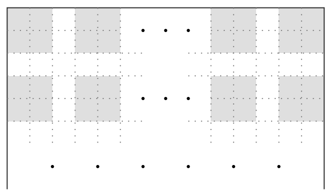
Предположим, что эти точки являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Без ограничения общности можно считать, что PR и QS суть диагонали этого четырёхугольника. В силу выпуклости нарисованных фигур $PR \subset A \cap B$ и $QS \subset C \cap D$. Значит, точка $PQ \cap RS$ принадлежит всем четырём множествам.



Предположим, что какая-то из этих четырёх точек лежит внутри треугольника с вершинами в остальных трёх точках. Без ограничения общности можно считать, что это S. В силу выпуклости множества A оно содержит весь треугольник PQR. Значит, точка S принадлежит всем четырём множествам. ■

Задача 5. Из листа клетчатой бумаги 29×29 вырезали 99 квадратов 2×2. Докажите, что из остатка можно вырезать ещё один такой квадрат.

Решение. Отметим на листе сто квадратов 2×2 таким образом, как показано на рисунке. Тогда никакой вырезанный квадрат не пересекает более одного из отмеченных. Значит, по принципу Дирихле найдётся отмеченный квадрат, из которого ничего не вырезали. Он и является искомым. ■



Задача 6. Круглый стол покрыт конечным числом круглых салфеток разных размеров. Докажите, что можно выбрать несколько салфеток, которые не пересекаются и покрывают не меньше $\frac{1}{9}$ площади стола.

Решение. Будем строить множество S с помощью следующего процесса:

- На первом шаге множество S пусто.
- На каждом следующем шаге мы выбираем наибольшую из салфеток (пусть это круг D_i с центром O_i и радиусом r_i), не содержащихся в S целиком, и добавляем к S круг с центром в O_i радиуса $3r_i$.

Очевидно, что процесс завершится в точности тогда, когда множество S будет содержать весь стол. Значит, площадь S не меньше, чем площадь стола.

С другой стороны, ясно, что площадь S не более чем в 9 раз превышает суммарную площадь всех салфеток $\{D_i\}$, которые использовались при его построении.

Осталось заметить, что салфетки $\{D_i\}$ не могут пересекаться. Действительно, пусть $D_i \cap D_j \neq \varnothing$ и $i < j$. Из построения следует, что $r_j \leqslant r_i$. Значит, расстояние между O_i и O_j не превышает $2r_i$ и тем самым салфетка D_j целиком содержится в круге с центром в O_i радиуса $3r_i$. Значит, она целиком содержалась в S после i-го шага и не могла быть выбрана на j-ом шаге. Противоречие.

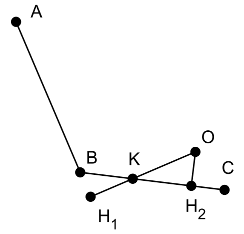
Таким образом, множество салфеток $\{D_i\}$ образует искомое покрытие. ■

Задача 7. Пусть S — площадь выпуклого многоугольника, P — его периметр, R — радиус максимального вписанного круга. Докажите, что $\frac{S}{P} \leqslant R \leqslant \frac{2S}{P}$.

Решение. Вначале докажем следующее утверждение:

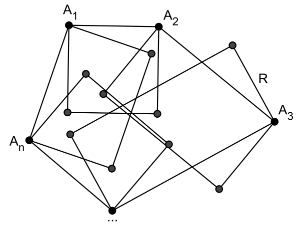
Утверждение 1. Для любой точки O внутри выпуклого многоугольника M основание перпендикуляра, опущенного на прямую, содержащую ближайшую к O сторону M, принадлежит стороне (а не её продолжению).

□ Пусть AB — ближайшая к O сторона M, и основание перпендикуляра H_1 попало на её продолжение за точку B. Пусть C — вершина M, соседняя с B. Покажем, что расстояние от O до BC меньше, чем до AB. Действительно, точка H_1 находится снаружи M, поэтому отрезок OH_1 пересекает прямую BC в некоторой точке K ($OK < OH_1$). Но расстояние от O до BC заведомо не больше OK. Противоречие. ■

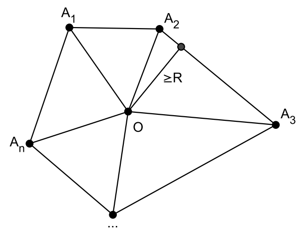


Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — вершины многоугольника. Для удобства будем считать, что $A_{n+1} = A_1$.

Докажем первое неравенство. Построим на каждой стороне многоугольника прямоугольник высоты R в той же полуплоскости, что и сам многоугольник (см. рисунок). Предположим, что найдётся O — точка многоугольника, не покрытая ни одним прямоугольником. Это означает, что расстояние от O до ближайшей стороны многоугольника строго больше R (по доказанному утверждению основание перпендикуляра, опущенного из неё на ближайшую сторону, принадлежит стороне). Значит, расстояние от O до всех прямых, содержащих стороны многоугольника, строго больше R, и существует круг с центром в O радиуса больше R, целиком лежащий внутри многоугольника. Противоречие с максимальностью R. Значит, весь многоугольник покрыт прямоугольниками и его площадь не больше их суммарной площади: $S \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} RA_iA_{i+1} = RP$.



Докажем второе неравенство. Пусть O — центр максимального вписанного круга. Соединим точку O со всеми вершинами. По доказанному утверждению наименьшая из высот получившихся треугольников опирается на строну многоугольника (а не на её продолжение) и поэтому не меньше R. Значит, высота каждого из получившихся треугольников не меньше R, а поэтому $S \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2} RA_iA_{i+1} = R \cdot \frac{P}{2}$. ■



Задача 8. Квадратная площадь 100×100 выложена квадратной плиткой четырёх цветов: белого, красного, чёрного и зелёного — так, что никакие две плитки одинакового цвета не соприкасаются друг с другом (стороной или углом). Сколько может быть красных плиток?

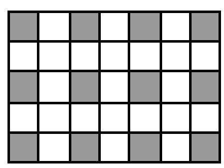
Ответ: 2500

Решение. Разобьём всю площадь на 2500 квадратов 2×2. Очевидно, что в одном квадрате не могут встретиться две плитки одинакового цвета. Значит, в каждом из квадратов расположено ровно по одной плитке каждого цвета. В частности, число красных плиток равно числу квадратов, то есть 2500.

С другой стороны, хотя бы одно замощение, удовлетворяющее условиям задачи существует: достаточно все 2500 квадратов одинаково замостить четырьмя плитками разных цветов. ■

Задача 9. Можно ли прямоугольник 5×7 покрыть уголками из трёх клеток (т.е. фигурками, которые получаются из квадрата 2×2 удалением одной клетки) в несколько слоёв так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом уголков?

Ответ: Нет



Решение. Раскрасим прямоугольник в два цвета так, как показано на рисунке. Тогда в нём будет 12 чёрных клеток и 23 белых. Напишем в каждую белую клетку число 1, а в каждую чёрную — число -2. Сумма всех чисел в прямоугольнике равна $23 \cdot 1 - 12 \cdot 2 = -1$.

Каждый уголок содержит либо три белых клетки, либо две белых и одну чёрную. Поэтому сумма чисел в одном уголке неотрицательна. Значит, если бы существовало искомое покрытие в k слоёв, то сумма всех чисел во всех уголках тоже была бы неотрицательна. Но с другой стороны она должна была бы равняться $(-1) \cdot k < 0$. Противоречие. ■