Вынужденные колебания.

Процессы, возникающие в электрических цепях под действием внешнего периодического источника тока, называются ***вынужденными колебаниями***.

Вынужденные колебания, в отличие от собственных колебаний в электрических цепях, являются **незатухающими**. Внешний источник периодического воздействия обеспечивает приток энергии к системе и не дает колебаниям затухать, несмотря на наличие неизбежных потерь.

Особый интерес представляет случай, когда внешний источник, напряжение которого изменяется по гармоническому закону с частотой ω, включен в электрическую цепь, способную совершать собственные свободные колебания на некоторой частоте ω_0.

Если частота ω_0 свободных колебаний определяется параметрами электрической цепи, то **установившиеся вынужденные колебания всегда происходят на частоте ω внешнего источника**.

Для установления вынужденных стационарных колебаний после включения в цепь внешнего источника необходимо некоторое время Δ*t*. Это время по порядку величины равно времени τ затухания свободных колебаний в цепи.

Электрические цепи, в которых происходят установившиеся вынужденные колебания под действием периодического источника тока, называются **цепями переменного тока**.

Рассмотрим последовательный колебательный контур, то есть RLC-цепь, в которую включен источник тока, напряжение которого изменяется по периодическому закону (рис. 2.3.1):

$e(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$,

где $\mathcal{E}_0$ – амплитуда, ω – круговая частота.

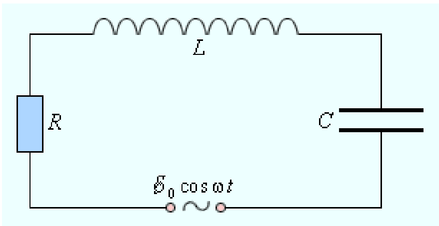

Рисунок 2.3.1.

Предполагается, что для электрической цепи, изображенной на рис. 2.3.1, выполнено условие **квазистационарности** (Электромагнитные возмущения распространяются с конечной скоростью, равной скорости света c , то $\tau \approx \frac{l}{c}$, где l – расстояние между наиболее удаленными точками цепи. Если это время τ много меньше длительности процессов, происходящих в цепи, то можно считать, что в каждый момент времени сила тока одинакова во всех последовательно соединенных участках цепи. Процессы такого рода в электрических цепях а также сами цепи, называются квазистационарными.).

Поэтому для мгновенных значений токов и напряжений можно записать закон Ома:

$$RJ + \frac{q}{C} + L\frac{dJ}{dt} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

Величина $L\frac{dJ}{dt}$ – это ЭДС самоиндукции катушки, перенесенная с изменением знака из правой части уравнения в левую. Эту величину принято называть **напряжением на катушке индуктивности**.

Уравнение вынужденных колебаний можно записать в виде

$$u_R + u_C + u_L = e(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t,$$

где $u_R(t)$, $u_C(t)$ и $u_L(t)$ – мгновенные значения напряжений на резисторе, конденсаторе и катушке соответственно. Амплитуды этих напряжений будем обозначать буквами U_R, U_C и U_L. При установившихся вынужденных колебаниях все напряжения изменяются с частотой ω внешнего источника переменного тока. Для наглядного решения уравнения вынужденных колебаний можно использовать **метод векторных диаграмм**.

Для того, чтобы построить векторную диаграмму напряжений и токов при вынужденных колебаниях в электрической цепи, нужно знать соотношения между амплитудами токов и напряжений и фазовый сдвиг между ними для всех участков цепи.

Рассмотрим по отдельности случаи подключения внешнего источника переменного тока к резистру с сопротивлением R, конденсатору с емкостью C и катушки с индуктивностью L. Во всех трех случаях напряжение на резисторе, конденсаторе и катушке равно напряжению источника переменного тока.

1. Резистор в цепи переменного тока

$$J_R R = u_R = U_R \cos \omega t; \quad J_R = \frac{U_R}{R} \cos \omega t = I_R \cos \omega t.$$

Здесь через I_R обозначена амплитуда тока, протекающего через резистор.

Фазовый сдвиг между током и напряжением на резисторе равен нулю. Физическая величина R называется **активным сопротивлением резистора**.

2. Конденсатор в цепи переменного тока

$$u_C = \frac{q}{C} = U_C \cos \omega t;$$

$$J_C = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt} = CU_C(-\omega \sin \omega t) = \omega C U_C \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_C \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Соотношение между амплитудами тока I_C и напряжения U_C:

$$\boxed{\frac{1}{\omega C} I_C = U_C.}$$

Ток опережает по фазе напряжение на угол π/2

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Физическая величина называется **емкостным сопротивлением конденсатора**.

3. Катушка в цепи переменного тока

$$u_L = L\frac{dJ_L}{dt} = U_L \cos \omega t;$$

$$J_L = \int \frac{U_L}{L} \cos \omega t \, dt = \frac{U_L}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_L}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_L \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Соотношение между амплитудами тока I_L и напряжения U_L:

$$\boxed{\omega L I_L = U_L.}$$

Ток отстает по фазе от напряжения на угол π/2

Физическая величина $X_L = \omega L$ называется **индуктивным сопротивлением катушки**.

Теперь можно построить векторную диаграмму для последовательного RLC-контура, в котором происходят вынужденные колебания на частоте ω. Поскольку ток, протекающий через последовательно соединенные участки цепи, один и тот же, векторную диаграмму удобно строить относительно вектора, изображающего колебания тока в цепи. Амплитуду тока обозначим через I_0. Фаза тока принимается равной нулю. Это вполне допустимо, так как физический интерес представляют не абсолютные значения фаз, а относительные фазовые сдвиги. Векторная диаграмма для последовательного RLC-контура изображена на рис. 2.3.2.

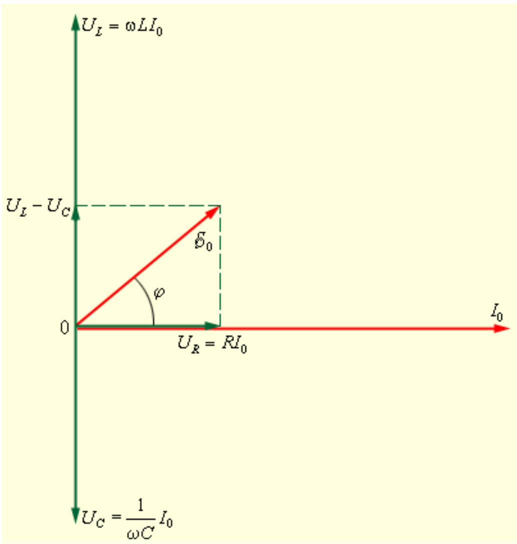

Рисунок 2.3.3.
Векторная диаграмма для последовательной RLC-цепи

$$\omega L > \frac{1}{\omega C} \qquad \omega^2 > \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Векторная диаграмма на рис. 2.3.2 построена для случая или В этом случае напряжение внешнего источника опережает по фазе ток, текущий в цепи, на некоторый угол φ.

Из рисунка видно, что

$$\mathscr{E}_0^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2,$$

откуда следует

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Из выражения для I_0 видно, что амплитуда тока принимает максимальное значение при условии

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

или

$$\omega^2 = \omega_{\text{рез}}^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Явление возрастания амплитуды колебаний тока при совпадении частоты ω колебаний внешнего источника с собственной частотой ω_0электрической цепи называется **электрическим резонансом**. При резонансе

$$(I_0)_{\text{рез}} = \frac{\mathscr{E}_0}{R}.$$

Сдвиг фаз φ между приложенным напряжением и током в цепи при резонансе обращается в нуль. Резонанс в последовательной RLC-цепи называется **резонансом напряжений**. Аналогичным образом с помощью векторной диаграммы можно исследовать явление резонанса при параллельном соединении элементов R, L и C (так называемый **резонанс токов**).

При последовательном резонансе ($\omega = \omega_0$) амплитуды U_C и U_L напряжений на конденсаторе и катушке резко возрастают:

$$\left(U_L\right)_{\text{рез}} = \left(U_C\right)_{\text{рез}} = \omega_0 L \left(I_0\right)_{\text{рез}} = \frac{\mathscr{E}_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

В § 2.2 было введено понятие добротности RLC-контура:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Таким образом, при резонансе амплитуды напряжений на конденсаторе и катушке в Q раз превышают амплитуду напряжения внешнего источника.

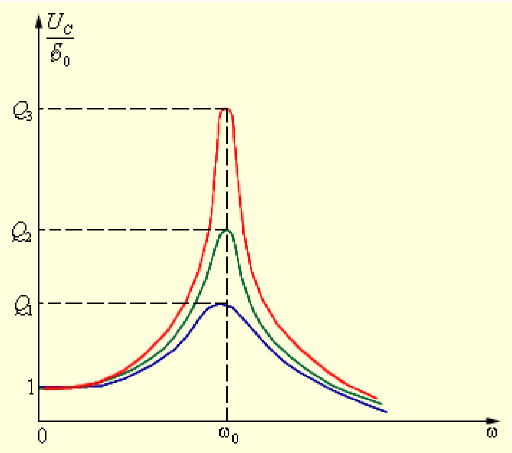

Рисунок 2.3.4.
Резонансные кривые для контуров с различными значениями добротности Q

Рис. 2.3.4 иллюстрирует явление резонанса в последовательном электрическом контуре. На рисунке графически изображена зависимость отношения амплитуды U_C напряжения на конденсаторе к амплитуде $\mathscr{E}_0$ напряжения источника от его частоты ω для различных значений добротности Q. Кривые на рис. 2.3.3 называются **резонансными кривыми**.