Задача 6. Вершины графа G раскрашены в $k = \chi(G)$ цветов так, что любые две соседние вершины имеют разные цвета. Докажите, что в G существует путь, вдоль которого встречаются вершины всех k цветов ровно по одному разу.

Решение. Присвоим каждому цвету номер — от 1 до k. Рассмотрим множества вершин $\{V_i \colon 1 \leqslant i \leqslant k\}$, где V_1 — множество всех вершин цвета 1, а множество V_{i+1} определяется как множество всех вершин цвета i, которые связаны ребром хотя бы с одной вершиной множества V_{i-1}. Рассмотрим также множество $V_0 = V \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_k$.

Утверждение 1. Можно уменьшить цвет каждой вершины из V_0 на 1 и это не нарушит корректности раскраски всего графа.

□ Поскольку все вершины цвета 1 входят в V_1 и тем самым не входят в V_0, то все возникающие цвета допустимы.

Предположим, что после такой перекраски возникли две соседние вершины u_1 и u_2 одного и того же цвета i. Такое возможно только, если ровно одна из них была перекрашена. Без ограничения общности можно считать, что $u_1 \in V_0$ и $u_2 \notin V_0$ (значит, до перекраски вершина u_1 имела цвет $i+1$). Но тогда из данных определений следует, что $u_2 \in V_i$ и $u_1 \in V_{i+1}$, что противоречит предположению $u_1 \in V_0$.

Утверждение доказано. ■

Из доказанного утверждения следует, что никакое из множеств V_i непусто. Действительно, предположим, что какое-то из них пусто. Тогда пусто и V_k, а значит, все вершины цвета k лежат в V_0. Таким образом описанная перекраска приводит к раскраске графа G в менее чем k цветов (k-ый цвет полностью исчезнет), что недопустимо по условию.

Теперь выберем любую вершину из V_k — она соединена с какой-то вершиной из V_{k-1}; та соединена с какой-то вершиной из V_{k-2} и т. д. Все встреченные вершины как раз и образуют искомый путь. ■

Задача 7. В классе учится 15 мальчиков и 15 девочек. В день 8 Марта некоторые мальчики позвонили некоторым девочкам и поздравили их с праздником (никакой мальчик не звонил одной и той же девочке дважды). Оказалось, что детей можно единственным образом разбить на 15 пар так, чтобы в каждой паре оказались мальчик с девочкой, которой он звонил. Какое наибольшее число звонков могло быть сделано?

Ответ: $\dfrac{15 \cdot 16}{2} = 120$

Решение. Рассмотрим двудольный граф G, образованный учениками, рёбра в котором соответствуют сделанным звонкам. Будем доказывать по индукции, что если число мальчиков и число девочек в классе равно n, то могло быть сделано не более $\frac{n(n+1)}{2}$ звонков. База при $n = 1$ очевидна.

Утверждение 2. Пусть степень каждой вершины хотя бы 2. Тогда детей можно разбить на пары хотя бы двумя способами.

□ Пусть $(u_1, v_1), \ldots (u_n, v_n)$ — набор рёбер, обеспечивающих какое-то одно разбиение на пары (оно есть по условию задачи). По условию утверждения вершина u_1 также соединена с некоторой вершиной v_{i_1}. Без ограничения общности можно считать, что $v_{i_1} = v_2$. И так далее по очереди: вершина u_k соединена с вершиной v_{k+1}. В какой-то момент окажется, что очередная вершина u_s соединена с вершиной v_{i_s}, где $i_s < s$. Обозначим $t = i_s$. Теперь можно предъявить другое разбиение школьников на пары: $\{(u_k, v_k) \colon k < t \text{ или } k > s\} \cup \{(u_k, v_{k+1}) \colon t \leqslant k < s\} \cup \{(u_s, v_t)\}$. ■

Значит, найдётся вершина степени 1. Без ограничения общности можно считать, что это вершина u_1, соединённая с вершиной v_1. Рассмотрим граф, состоящий из остальных вершин. Из условия задачи следует, что в нём детей можно разбить на пары единственным образом. Значит, по предположению индукции в нём не более $\frac{n(n-1)}{2}$ рёбер. Ещё может быть не более $n-1$ рёбра, соединяющих его вершины с v_1, и ещё есть ребро (u_1, v_1). Значит, всего в графе G не более $\frac{n(n+1)}{2}$ рёбер, что завершает доказательство. ■

Задача 8. В королевстве N городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются соседними). При этом известно, что из любого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город.
Однажды Король провел такую реформу: каждый из N мэров городов стал снова мэром одного из N городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что любые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдётся город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдётся пара соседних городов, обменявшихся мэрами.

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, а рёбрами — дороги. По условию задачи этот граф является деревом. Реформа задаёт некоторый его автоморфизм.

Будем доказывать утверждение по индукции. Если в дереве одна или две вершины, то утверждение задачи очевидно выполнено. Предположим, что в графе хотя бы три вершины. Рассмотрим граф G', содержащий все вершины G, степень которых (в G) больше 1. Очевидно, что граф G' непуст (в G хотя бы три вершины), связен (удаление висячих вершин не нарушает связности графа) и не совпадает с G (в дереве есть хотя бы одна висячая вершина). Кроме того он инвариантен относительно автоморфизма (так как степени вершин сохраняются) и по предположению индукции в G' найдётся либо неподвижная вершина (мэр, оставшийся в своём городе), либо неподвижное ребро (два соседних города, обменявшихся мэрами). ■
