Задача 4. В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

Решение. Рассмотрим ориентированный граф, вершинами которого являются города, а рёбрами — дороги. Обозначим через C вершину, соответствующую столице. По условию степень каждой вершины кроме C равна $21 - 20 = 1$. Поскольку сумма степеней всех вершин ориентированного графа равняется нулю, $\deg C = -100 = \deg^+ C - \deg^- C$. Но $\deg^- C \leqslant 100$. Значит, $\deg^+ C = 0$.

Это как раз и означает, что в столицу нельзя въехать ни из одного другого города. ■

Задача 5. В некотором городе на любом перекрестке сходятся ровно 3 улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрестке сходятся улицы трёх разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они имеют разные цвета.

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются перекрёстки, рёбрами улицы, и ещё есть одна дополнительная вершина O, в которой заканчиваются три выходящие из города дороги. Пусть n — количество перекрёстков в городе. Пусть цвета имеют номера 1, 2 и 3; будем через $\deg^i v$ обозначать число рёбер цвета i, выходящих из вершины v.

По условию задачи для любой вершины $v \neq O$ справедливо $\deg^1 v = \deg^2 v = \deg^3 v = 1$. По лемме о рукопожатиях число рёбер цвета i равно $\frac{1}{2}(n + \deg^i O)$. Общее число рёбер равно $\frac{3(n+1)}{2}$, поэтому n нечётно. Отсюда в частности следует, что для всех i выполнено $\deg^i O \geqslant 1$ (иначе число $\frac{1}{2}(n+\deg^i O)$ не будет целым).

Значит, из города выходит хотя бы по одной дороге каждого из цветов. Поскольку их всего три, то это суть три разноцветные дороги. ■

Задача 6. В некоторой стране расположено несколько замков. Из каждого замка ведут три дороги. Из какого-то замка выехал рыцарь. Странствуя по дорогам, он из каждого замка, стоящего на его пути, поворачивает либо направо, либо налево по отношению к дороге, по которой приехал. Рыцарь никогда не сворачивает в ту сторону, в которую он свернул перед этим. Докажите, что когда-нибудь он вернётся в исходный замок.

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются замки, а рёбрами дороги. Пусть рыцарь последовательно посетил замки $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ Рассмотрим всевозможные последовательные тройки вершин (v_i, v_{i+1}, v_{i+2}) в этом пути. Поскольку число вершин в графе конечно, то и различных троек вершин тоже бывает конечное число. Значит, в некоторый момент в пути рыцаря какие-то две тройки повторятся. Выберем первое такое повторение: $(v_i, v_{i+1}, v_{i+2}) = (v_j, v_{j+1}, v_{j+2})$. Будем считать, что $i < j$.

Докажем, что в этом случае $i = 1$. Без ограничения общности можно считать, что после обоих посещений замка $v_{i+1} = v_{j+1}$ рыцарь свернул направо (в замок $v_{i+2} = v_{j+2}$). Тогда перед этим (в замке $v_i = v_j$) он должен был сворачивать налево (в замок $v_{i+1} = v_{j+1}$). Для этого он должен был въезжать в замок $v_i = v_j$ по одной и той же дороге. А значит, $v_{i-1} = v_{j-1}$. Это противоречит минимальности выбора i.

Значит, $i = 1$ и $v_j = v_i = v_1$. Что и требовалось доказать. ■

Задача 7. В секретной службе работают n агентов. Первый агент следит за тем, кто следит за вторым, второй — за тем, кто следит за третьим, и т. д., n-ый — за тем, кто следит за первым. Докажите, что n нечётно.

Решение. Рассмотрим ориентированный граф, вершинами которого являются агенты, а ребро (i, j) присутствует тогда и только тогда, когда i-ый агент следит за j-ым. Из условия задачи следует, что каждый агент следит ровно за одним другим агентом, и за каждым агентом кто-то следит. Значит, рассматриваемый граф представляет собой объединение нескольких простых циклов.

Начнём с вершины 1 и будем идти по рёбрам, проходя по два ребра за раз. По условию задачи таким образом мы побываем во всех вершинах по порядку. Из этого следует, что граф связен, а значит, является одним простым циклом. Легко видеть, что если цикл имеет чётную длину, то при обходе его описанным образом мы посетим не все вершины (только те, которые имеют чётные номера). Значит, число агентов нечётно. ■

Задача 8. В стране n городов. Между каждыми двумя городами установлено воздушное сообщение одной из двух авиакомпаний. Докажите, из этих двух авиакомпаний хотя бы одна такова, что из любого города можно попасть в любой другой рейсами только этой авиакомпании.

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются города; рёбрами соединены те города, между которыми есть прямой рейс первой авиакомпании.

Если полученный граф связен, то первая авиакомпания искомая.

Предположим, что он не связен. Рассмотрим какие-нибудь две вершины v_1 и v_2. Если они не соединены ребром, то из v_1 можно попасть в v_2 рейсом второй авиакомпании. Если же они соединены ребром, то они принадлежат одной и той же связной компоненте. Выберем дополнительно вершину u из какой-нибудь другой связной компоненты. Тогда можно совершить перелёт по пути (v_1, u, v_2) рейсами второй авиакомпании. Таким образом вторая авиакомпания искомая. ■

Задача 9. Выбежав после уроков на двор, каждый школьник кинул снежком ровно в одного другого школьника. Докажите, что всех учащихся можно разбить на три команды так, что члены одной команды друг в друга снежками не кидали.

Решение. Рассмотрим ориентированный граф, вершинами которого являются школьники, а ребро (i, j) присутствует тогда и только тогда, когда i-ый школьник кинул снежок в j-го. Будем красить его в три цвета, соответствующие делению школьников по командам.

Докажем утверждение индукцией по числу вершин. Если школьников всего 2, то утверждение очевидно.

Если граф несвязен, то по предположению индукции все его связные компоненты можно раскрасить по отдельности.

Предположим, что есть школьник, в которого никто не кидался. Тогда удалим его и покрасим всех остальных в три цвета. Удалённого школьника можно покрасить в любой из цветов, отличных от цвета его мишени.

Итак, осталось рассмотреть случай связного графа без источников. Поскольку исходящая степень каждой вершины равна одному, то это простой цикл. Очевидно, что цикл можно покрасить в три цвета требуемым образом. ■

Задача 10. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, а рёбрами дороги. По условию задачи граф связен.

Предположим, что после удаления ребра (u, v) граф становится несвязным. Рассмотрим G' — связную компоненту вершины u в графе, получившемся после удаления этого ребра. Очевидно, что вершина v не содержится в G'. Но тогда в G' есть вершина u степени 99, а все остальные вершины G' имеют степень 100. Такое очевидно невозможно (по лемме о рукопожатиях сумма степеней всех вершин должна быть чётна).

Значит, граф должен остаться связным. ■

Задача 11. В некоторой стране есть военные базы, соединенные дорогами. Набор дорог называется *важным,* если после закрытия этих дорог найдутся две базы, не соединенные путем. Важный набор называется *стратегическим,* если он не содержит меньшего важного набора. Докажите, что множество дорог, каждая из которых принадлежит ровно одному из двух различных стратегических наборов, образует важный набор.

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются базы, а рёбрами дороги. По условию задачи граф связен.

Вначале докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Если удалить стратегический набор рёбер, граф распадётся на две связные компоненты, причём каждое удалённое ребро имеет своими концами вершины из разных компонент.*

□ Зафиксируем какой-нибудь стратегический набор рёбер S и будем удалять его рёбра по одному. По условию задачи в самом начале граф был связен, а после удаления всех рёбер из S стал несвязен. Рассмотрим то ребро, после удаления которого граф стал несвязным в первый раз. Множество всех удалённых к этому моменту рёбер (включая это последнее) образует важный набор, а следовательно совпадает с S. Но удаление одного последнего ребра не могло привести к распаду графа на более чем две компоненты.

Итак, пусть после удаления S образовалось две связные компоненты G_1 и G_2. Рассмотрим все рёбра исходного графа, которые соединяют G_1 и G_2. Они все содержатся в S и при этом образуют важный набор. Значит, других рёбер в S и нет. ■

Теперь перейдём к доказательству исходного утверждения. Пусть S и T — два различных стратегических набора. Удаление всех рёбер из S приводит к разбиению графа на компоненты G_1 и G_2, а удаление рёбер из T — к разбиению на G^1 и G^2. Обозначим $G_i^j = G_i \cap G^j$. Без ограничения общности можно считать, что множество G_1^1 непустое. Поскольку наборы S и T различны, то множество $G_1^2 \cup G_2^1$ также непустое. Вырежем из исходного графа все рёбра, которые принадлежат ровно одному из наборов S и T. Легко видеть, что не осталось рёбер, соединяющих множества $G_1^1 \cup G_2^2$ и $G_1^2 \cup G_2^1$. Действительно, предположим, что осталось ребро, соединяющее G_1^1 и G_1^2. Но тогда оно принадлежит $T \setminus S$ и уже удалено из графа. Остальные три случая полностью аналогичны. ■
