Задача 1. Фишка ходит по квадратной доске, каждым своим ходом сдвигаясь либо на клетку вверх, либо на клетку вправо, либо по диагонали вниз-влево. Может ли она обойти всю доску, побывав на всех полях ровно по одному разу, и закончить на поле, соседнем справа от исходного?

Ответ: Нет

Решение. Предположим, что такое возможно. Пусть после n-го хода фишка находится в клетке с координатами (x_n, y_n). Легко видеть, что остаток от деления выражения $x_n + y_n - n$ на 3 является инвариантом. В самом начале он равен $x_0 + y_0$, а в конце должен равняться $x_0 + 1 + y_0 - (k^2 - 1)$, где k — сторона квадрата. Таким образом $(x_0 + 1 + y_0 - (k^2 - 1)) - (x_0 + y_0) = (2 - k^2) \equiv 0 \mod 3$. Но квадрат числа не может иметь остаток 2 от деления на 3. Противоречие. ■

Задача 2. Таблица 10×10 заполняется по правилам игры «Сапёр»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). На какое наибольшее число может измениться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?

Ответ: 0

Решение. Сумма всех чисел на доске равна числу всех пар соседних клеток, одна из которых содержит мину, а другая — нет. Поскольку описанная операция, не изменяет число таких пар (в каждой паре заминированная и незаминированная клетка меняются местами), то и сумма всех чисел измениться не может. ■

Задача 3. На горе 1001 ступенька, на некоторых лежат камни, по одному на ступеньке. Сизиф берёт любой камень и переносит его на ближайшую сверху свободную ступеньку (то есть, если следующая ступенька свободна то на неё, а если занята, то на несколько ступенек вверх до первой свободной). После этого Аид скатывает на одну ступеньку вниз один из камней, у которых предыдущая ступенька свободна. Камней 500, и первоначально они лежали на нижних 500 ступеньках. Сизиф и Аид действуют по очереди, начинает Сизиф. Его цель — положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли Аид ему помешать?

Ответ: Да

Решение. Аид может придерживаться следующей стратегии: пусть Сизиф поднял камень со ступеньки номер n. Тогда Аид должен своим ходом скатить камень с $n+1$-ой ступеньки (очевидно, что она будет не пуста).

Утверждение: если Аид придерживается такой стратегии, то после его хода первая ступенька обязательно заполнена и между любыми двумя камнями не более одной пустой ступеньки.

Докажем это утверждение по индукции. База очевидна. Предположим, что это условие выполнено после k ходов каждого из игроков. Проверим, что оно сохранится после ещё одной пары ходов. Первая ступенька останется заполнена (если Сизиф убирает с неё камень, то Аид тут же возвращает). Пусть Сизиф сдвинул камень со ступеньки номер n. Если ступенька номер $n+1$ была свободна, что после хода Аида вообще ничего не изменилось. Если же она была занята, то после хода Аида ступеньки n и $n+2$ заведомо заняты. Также отметим, что если $m \notin [n, n+2]$ и ступенька номер m была занята, то она осталась занята. Значит, две подряд идущие пустые ступеньки образоваться не могут.

Из доказанного утверждения следует, что после каждого хода Аида максимальный номер занятой ступеньки не может превышать 999. Поэтому Сизиф выиграть не может. ■

Задача 4. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого — квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек переместить вторую ножку в другой узел клетчатой бумаги. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами?

Ответ: Нет

Решение. Предположим, что это так бывает. Установим минимальный раствор циркуля, при котором это возможно.

Введём на сетке систему координат так, что одна из ножек циркуля в начальный момент времени находится в точке $(0,0)$. Раскрасим узлы сетки: точки вида $(2a, 2b)$ покрасим в белый цвет, точки вида $(2a+1, 2b+1)$ покрасим в чёрный цвет, все остальные — в серый.

Легко видеть, что

- квадрат расстояния между двумя белыми точками имеет остаток 0 от деления на 4,
- квадрат расстояния между двумя чёрными точками имеет остаток 0 от деления на 4,
- квадрат расстояния между двумя серыми точками имеет остаток 0 или 2 от деления на 4,
- квадрат расстояния между белой и серой точками имеет остаток 1 от деления на 4,
- квадрат расстояния между чёрной и серой точками имеет остаток 1 от деления на 4,
- квадрат расстояния между белой и чёрной точками имеет остаток 2 от деления на 4.

Рассмотрим остаток от деления квадрата раствора циркуля на 4.

1. Пусть он равен 2.

   Тогда после любого числа ходов вторая ножка стоит в чёрной точке, а первая — в белой. Значит, поменять местами ножки циркуля не получится.

2. Пусть он равен 1.

   Тогда после любого числа ходов вторая ножка стоит в серой точке, а первая — в белой или чёрной. Значит, поменять местами ножки циркуля не получится.

3. Пусть он равен 0.

   Тогда после любого числа ходов обе ножки стоят в белых точках. Значит, на самом деле циркуль ходит только по узлам с чётными координатами. Применим к пути циркуля гомотетию с центром в точке $(0,0)$ и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Получится, что циркуль всё ещё ходит по узлам сетки и меняет местами ножки, но раствор у него в два раза меньше. Это противоречит тому, что исходно мы выбрали минимальный раствор.

4. Равняться 3 он не может (это сумма квадратов двух целых чисел).

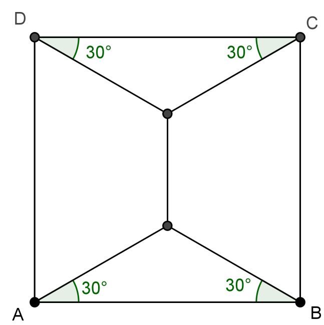
■

Задача 1. Можно ли на плоскости расположить 2014 отрезков так, чтобы каждый отрезок обоими концами упирался строго внутрь других отрезков?

Ответ: Нет

Решение. Предположим, что такая конфигурация существует. Введём на плоскости систему координат и рассмотрим конец отрезка, имеющий наибольшую абсциссу. Если таких несколько, выберем из них тот, который имеет наибольшую ординату. По условию задачи, эта точка лежит строго внутри одного из других отрезков. Если этот отрезок невертикален, то один из его концов должен иметь бóльшую абсциссу; если он вертикален — бóльшую ординату. В любом случае получаем противоречие со сделанным выбором. ■

Задача 2. Четыре села находятся в вершинах квадрата со стороной 1 км. Для того, чтобы можно было проехать из каждого села в каждое, проложили две прямолинейные дороги вдоль диагоналей данного квадрата. Можно ли проложить сеть дорог между селами иным образом так, чтобы их суммарная длина уменьшилась, но по-прежнему из каждого села можно было проехать в каждое?



Ответ: Да

Решение. Проведём дороги, как показано на рисунке и убедимся, что суммарная длина получилась меньше. Длина такой сети равна

$$4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = 1 + \sqrt{3} < 2\sqrt{2}$$

■

Задача 3. Квадрат 8×8 клеток выкрашен в белый цвет. Разрешается выбрать в нём любой прямоугольник из трёх клеток и перекрасить все их в противоположный цвет (белые в чёрный, чёрные — в белый). Удастся ли несколькими такими операциями перекрасить весь квадрат в чёрный цвет?

Ответ: Нет

Решение. Разобьём клетки квадрата на три группы как показано на рисунке:

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

Очевидно, что любой прямоугольник 3×1 содержит по одной клетке из каждой группы, и перекрашивание одного прямоугольника не меняет чётность разности числа закрашенных клеток из второй группы и числа закрашенных клеток из первой группы. Исходно эта разность равна нулю, а в полностью закрашенном квадрате — одному.

Значит, закрасить весь квадрат подобными операциями нельзя. ■

Задача 4. Имеются пять внешне одинаковых гирь с попарно различными массами. Разрешается выбрать любые три из них A, B и C и спросить, верно ли, что $m(A) < m(B) < m(C)$ (через $m(x)$ обозначена масса гири x). При этом дается ответ «Да» или «Нет». Можно ли за девять вопросов гарантированно узнать, в каком порядке идут веса гирь?

Ответ: Нет

Решение. Всего есть $5! = 120$ способов упорядочить гири. Неравенству $m(A) < m(B) < m(C)$ удовлетворяют $\frac{5!}{3!} = 20$ из них. Значит, при получении ответа «Нет» мы можем отбросить не более 20 вариантов. Предположим, что мы получили ответ «Нет» на первые 5 вопросов. Тогда осталось не менее $120 - 5 \cdot 20 = 20$ различных способов упорядочить гири, согласующихся с данными ответами. Но за четыре оставшихся вопроса мы не сможем различить все эти варианты (на каждый вопрос есть два варианта ответа и $2^4 = 16 < 20$). ■