Задача 3. На небе бесконечное число звёзд. Астроном приписал каждой звезде пару натуральных чисел, выражающую яркость и размер. Докажите, что найдутся две звезды, первая из которых не меньше второй как по яркости, так и по размеру.

Решение. Если найдутся две одинаковые звезды, то это искомая пара. Поэтому можно считать, что любые две звезды отличаются хотя бы по одному параметру.

Поскольку звёзд бесконечно много, хотя бы один из параметров (яркость и размер) принимает бесконечное число различных значений. Без ограничения общности можно считать, что это размер.

Выберем наименее яркую звезду (если таких несколько — любую из них) и назовём её A. Пусть её размер равен S_A. Поскольку размер принимает бесконечно много различных значений, найдётся звезда B, у которой размер больше, чем S_A. В силу выбора звезды A, её яркость не превосходит яркости B. Значит, пара звёзд (B, A) — искомая. ■

Задача 4. В течение дня в библиотеке побывало 57 читателей, каждый по одному разу. Оказалось, что в тот день из любых трёх читателей двое в библиотеке встретились. Докажите, что библиотекарь мог сделать важное сообщение в такие два момента времени, чтобы все 57 человек его услышали.

Решение. Будем через In_X и Out_X обозначать время прихода и ухода человека X соответственно.

Выберем двоих людей: A — тот, кто раньше всех ушёл (в момент времени Out_A), и B — тот, кто позже всех пришёл (в момент времени In_B).

Очевидно, что $In_A \leqslant Out_B$ — это сразу следует из выбора A и B.

Если они встретились друг с другом ($In_B \leqslant Out_A$), объявление можно сделать один раз в момент времени Out_A, и его услышат все 57 человек.

Предположим, что $Out_A < In_B$. Тогда для любого третьего человека C известно, что $Out_A \leqslant Out_C$ (по выбору A) и $In_C \leqslant In_B$ (по выбору B). Поскольку A и B между собой не встретились, то по условию задачи либо C встретился с A (и тогда $In_C \leqslant Out_A \leqslant Out_C$), либо с B (и тогда $In_C \leqslant In_B \leqslant Out_C$).

Таким образом каждый из читателей был в библиотеке либо в момент времени Out_A, либо в момент времени In_B. Поэтому библиотекарь может сделать объявления именно в эти два момента и его все услышат. ■

Задача 5. На окружности стоят 57 чисел, каждое из которых равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке. Найдите эти числа, если известно, что их сумма равна 1.

Ответ: Эти числа образуют периодическую последовательность с периодом $\left(\frac{1}{38}, \frac{1}{38}, 0\right)$.

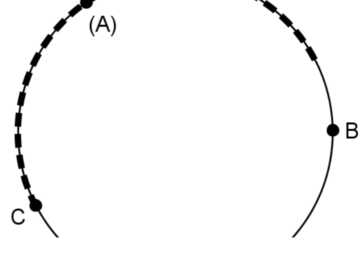
Решение. Обозначим искомые числа через $a_1, a_2, \ldots$, считая по часовой стрелке. Тогда $a_1 = |a_2 - a_3|$, $a_2 = |a_3 - a_4|, \ldots$ Поскольку каждое число равно модулю некоторой величины, все числа на окружности неотрицательны.

Без ограничения общности можно считать, что a_1 — самое большое число. Тогда если $a_2 < a_1$ и $a_3 < a_1$, то равенство $a_1 = |a_2 - a_3|$ невозможно. Значит, одно из чисел a_2, a_3 равно a_1.

Предположим, что $a_2 = a_1$. Тогда $a_3 = 0$, $a_4 = a_1$, $a_5 = a_1$, … Видно, что получается периодическая последовательность с периодом $(a_1, a_1, 0)$. Такое возможно в силу того, что 57 делится на 3. Поскольку сумма всех чисел равна 1, находим $a_1 = \frac{1}{38}$.

Если же $a_3 = a_1$, то $a_2 = 0$, $a_4 = a_1$. Снова получаем ту же самую последовательность. ■

Задача 6. Фокусник и его помощник собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2014 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полуокружность, на которой лежала стертая точка. Как фокуснику договориться с помощником, чтобы фокус гарантированно удался?



Решение. Приведём пример такой договорённости.

Рассмотрим 2014 дуг, на которые отмеченные точки разбили окружность. Помощник должен выбрать из них наибольшую (если таких несколько, то любую из них) и стереть её левый (считая по часовой стрелке) конец. На приведённом рисунке будет стёрта точка A.

В этом случае фокусник, войдя в комнату, должен выбрать самую большую дугу (теперь она уже единственна) и отметить полуокружность, левый конец которой совпадает с левым концом этой дуги (считая по часовой стрелке).

Докажем, что стёртая точка лежит на отмеченной полуокружности. Мы знаем, что стёртая точка (A) лежит на самой большой дуге (CB). Кроме того, мы знаем, что дуга AB была не меньше дуги CA. Поэтому дуга CA меньше полуокружности и тем самым содержится в полуокружности, отмеченной фокусником. ■

Задача 1. Натуральные числа a, b, c таковы, что числа $p = b^c + a$, $q = a^b + c$, $r = c^a + b$ простые. Докажите, что два из чисел p, q, r равны между собой.

Решение. Из чисел a, b, c хотя бы два имеют одинаковую чётность. Без ограничения общности можно считать, что это a и b. Предположим, что они оба чётные. Тогда $p = b^c + a$ тоже чётное. Если a и b оба нечётные, опять же получается $p = b^c + a$ — чётное.

Поскольку p — чётное простое, оно равно двум. Значит, $a = b = 1$. Тогда $q = r = 1+c$, что завершает доказательство. ■

Задача 2. У Игоря и Васи есть по белому квадрату 8×8, разбитому на клетки 1×1. Они закрасили по одинаковому числу клеток на своих квадратах в синий цвет. Докажите, что удастся так разрезать эти квадраты на доминошки 2×1, что и из доминошек Игоря и из доминошек Васи можно будет сложить по квадрату 8×8 с одной и той же синей картинкой.

Решение. Докажем, что как бы они не резали свои квадраты, всё равно получится сложить одинаковые картинки.

Итак, пусть квадраты как-то разрезаны. Всего бывает три вида доминошек: белые, синие и разноцветные. Сразу отложим в сторону те доминошки, которые у Васи и Игоря одинаковые. После этого у них остались одинаковые количества белых и синих клеток. Ясно, что у одного из них (пусть это будет Вася) останутся только разноцветные доминошки, а у второго (Игоря) — синие и белые. Пусть у Васи осталось a доминошек. Тогда у Игоря $a/2$ синих доминошек и столько же белых (в частности a чётно). Теперь все оставшиеся доминошки каждого из ребят можно разбить на пары, из которых складываются одинаковые квадраты 2×2.

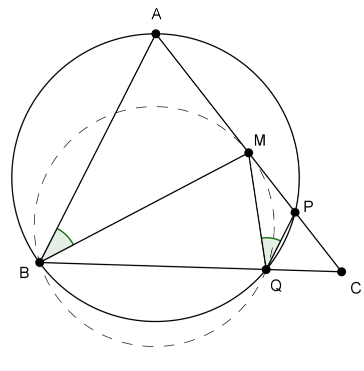
Из этих квадратов и изначально отложенных доминошек можно сложить большой квадрат 8×8. ■

Задача 3. Дана последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ Существует ли арифметическая прогрессия длины 57, составленная из её членов?

Ответ: Да

Решение. Рассмотрим последовательность, составленную из чисел вида $\frac{i}{57!}$, где $1 \leqslant i \leqslant 57$. Очевидно, что это арифметическая прогрессия (с разностью $\frac{1}{57!}$) и что все её члены принадлежат исходной последовательности (дробь $\frac{i}{57!}$ можно сократить на i). ■

Задача 4. Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P — середину CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает отрезок BC в точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.



Решение. Поскольку CA и CB — две секущие, проведённые к одной окружности, выполнено равенство $CB \cdot CQ = CP \cdot CA$. Их условия следует, что $CP \cdot CA = CM^2$. Поэтому $CB \cdot CQ = CM^2$. Значит, CM касается окружности, описанной около треугольника BMQ. Отсюда следует, что $\angle PMQ = \angle MBQ$ (они опираются на одну дугу).
Четырёхугольник $BAPQ$ вписанный, поэтому $\angle ABQ = \pi - \angle APQ$. Отсюда заключаем, что $\angle ABM = \pi - \angle APQ - \angle MBQ = \pi - \angle MPQ - \angle QMP = \angle MQP$. Что и требовалось доказать. ■
