Задача 1. Имеется 4 монеты, 3 из которых — настоящие, которые весят одинаково, и одна фальшивая, отличающаяся по весу от остальных. Чашечные весы без гирь таковы, что если положить на их чашки равные грузы, то любая из чашек может перевесить, если же грузы различны по массе, то обязательно перетягивает чашка с более тяжёлым грузом. За какое наименьшее число взвешиваний можно наверняка определить фальшивую монету и установить, легче она или тяжелее остальных?

Ответ: 3

Решение. Всего есть 8 различных начальных конфигураций, которые мы должны уметь различать (каждая из четырёх монет может оказаться фальшивой и быть при этом либо легче, либо тяжелее настоящих). Поскольку каждое взвешивание может иметь ровно два исхода, менее, чем тремя взвешиваниями обойтись нельзя.

Покажем теперь, как определить искомое за три взвешивания. Занумеруем гирьки числами от 1 до 4. Взвешивания будут такие:

1. $1 + 2$ vs $3 + 4$.
2. $1 + 3$ vs $2 + 4$.
3. $1 + 4$ vs $2 + 3$.

Поскольку в каждом взвешивании присутствует фальшивая гирька, равенство масс на чашах весов невозможно и показанное весами неравенство будет соответствовать реальности. Ясно также, что чаша с фальшивой гирькой всегда будет либо перевешивать (если фальшивая гирька тяжелее), либо оказываться на верху (если фальшивая гирька легче).

Покажем, что такая гирька (которая либо всегда оказывается внизу, либо всегда оказывается вверху) ровно одна при любом исходе взвешиваний. Без ограничения общности можно считать, что в первом взвешивании перевесила чаша $1 + 2$. Также можно считать (при необходимости перенумеровав гирьки $1 \leftrightarrow 2$ и $3 \leftrightarrow 4$), что при втором взвешивании перевесила чаша $1+3$. Тогда если в третьем взвешивании перевесила чаша $1 + 4$, то фальшивая гирька имеет номер 1 (тяжелее); если перевесила чаша $2 + 3$, то фальшивая гирька — 4 (легче).

Задача полностью решена. ■

Задача 2. Имеются две красные, две синие и две зелёные гири. В каждой паре одна из гирь весит 1кг, а другая — 900г. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах можно гарантированно определить веса всех гирь?

Ответ: 2

Решение. Всего есть 8 различных начальных конфигураций, которые мы должны уметь различать (в каждой паре одна из гирь может оказаться легче). Поскольку каждое взвешивание может иметь ровно три исхода, менее, чем двумя взвешиваниями обойтись нельзя.

Покажем теперь, как определить искомое за два взвешивания. Обозначим гири r_1, r_2, g_1, g_2, b_1, b_2. Первое взвешивание сделаем такое: $r_2 + g_1$ vs $g_2 + b_1$.

Если перевесила левая чаша, возможны следующие варианты («Л» — лёгкая; «Т» — тяжёлая):

r_1	r_2	g_1	g_2	b_1	b_2
Л	Т	Т	Л	Т	Л
Л	Т	Т	Л	Л	Т
Т	Л	Т	Л	Л	Т

Легко видеть, что второе взвешивание r_1 vs b_1 позволит различить эти три случая.

Случай, когда перевесила правая чаша, полностью аналогичен.

Предположим, что при первом взвешивании установилось равновесие. Тогда возможны следующие варианты:

r_1	r_2	g_1	g_2	b_1	b_2
Т	Л	Т	Л	Т	Л
Л	Т	Л	Т	Л	Т

Легко видеть, что второе взвешивание g_1 vs g_2 позволит различить эти два случая. ■

Задача 3. Из 11 шаров два радиоактивны. Про любой набор шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в нём хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). За какое наименьшее число проверок можно гарантированно найти оба радиоактивных шара?

Ответ: 7

Решение. Вначале покажем, как найти радиоактивные шары за 7 взвешиваний. Отложим один шар в сторону, а остальные 10 разобьём на пары. Проверим каждую пару отдельно (на это потребуется пять проверок). Если радиоактивные шары есть в двух парах, то проверим по одному шару из каждой из этих двух пар (две проверки). В каждой из пар радиоактивным будет либо проверенный шар, либо оставшийся (в зависимости от результата проверки); тем самым оба радиоактивных шара найдены. Предположим, что на первом этапе нашлась только одна пара, содержащая радиоактивные шары. Тогда оба радиоактивных шара находятся среди двух шаров этой пары и одного, отложенного изначально. Из этих трёх шаров проверим по отдельности любые два (2 проверки) — это позволит найти оба радиоактивных шара.

Теперь докажем, что шестью проверками обойтись нельзя. Предположим, что всё-таки можно. Посмотрим, сколько шаров участвовало в первой проверке. Если это число меньше трёх, то при отрицательном исходе проверки, нам остаётся различить не менее $C_9^2 = 36$ вариантов за не более, чем 5 проверок. С учётом того, что каждая проверка имеет всего два исхода и $36 > 2^5$, это невозможно. Если в первой проверке участвовало более трёх шаров, то при положительном исходе нам необходимо различить не менее $C_{11}^2 - C_7^2 = 55 - 21 = 34 > 2^5$ вариантов. Это также нельзя сделать за 5 проверок. Значит, в первой проверке обязательно должно участвовать 3 шара. Предположим, что исход отрицателен. Тогда нам необходимо найти два радиоактивных шара из восьми за 5 проверок. Рассуждая аналогично, получаем, что число шаров во второй проверке не может быть меньше двух ($C_7^2 = 21 > 2^4$) и не может быть больше двух ($C_8^2 - C_5^2 = 28 - 10 = 18 > 2^4$). Значит, во второй проверке должно участвовать ровно 2 шара. Предположим, что исход отрицателен. Тогда нам необходимо найти два радиоактивных шара из шести за 4 проверки. Число шаров в третьей проверке не может быть меньше двух ($C_5^2 = 10 > 2^3$) и не может быть больше одного двух ($C_6^2 - C_4^2 = 15 - 6 = 9 > 2^3$). Значит, решить исходную задачу за 6 проверок нельзя. ■

Задача 4. Биссектриса угла A треугольника ABC продолжена до пересечения в точке D с описанной вокруг него окружностью. Докажите, что $AD > \frac{1}{2}(AB + AC)$.

Решение.

■

Задача 5. На рёбрах произвольного тетраэдра указали направления. Может ли сумма полученных таким образом шести векторов оказаться равной нулю?

Ответ: Нет

Решение. Выберем какие-нибудь три ребра тетраэдра, выходящие из одной вершины и обозначим соответствующие векторы (направленные от общей вершины) через $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. Тогда вдоль остальных трёх рёбер направлены векторы $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$.

Сумма векторов из условия — это сумма перечисленных шести векторов с какими-то знаками:

$$\varepsilon_1 \overrightarrow{a} + \varepsilon_2 \overrightarrow{b} + \varepsilon_3 \overrightarrow{c} + \varepsilon_4 \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) + \varepsilon_5 \left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right) + \varepsilon_6 \left(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}\right), \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

В силу того, что векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ линейно независимы, указанная линейная комбинация может равняться нулю, только если каждый из коэффициентов при $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ равен нулю.

Рассмотрим коэффициент при $\overrightarrow{a}$. Он равен $\varepsilon_1 + \varepsilon_4 - \varepsilon_6$, что является нечётным числом при любых коэффициентах $\varepsilon_i = \pm 1$. Значит, этот коэффициент не может равняться нулю, и вся сумма нулю не равна. ■

Задача 6. Известно, что при любом целом $n \neq 27$ число $m - n^3$ делится без остатка на $27 - n$. Найдите m.

Ответ: 27^3

Решение. Будем смотреть на величины $m - n^3$ и $27 - n$ как на многочлены от n. По теореме Безу, остаток от деления $m - n^3$ на $27 - n$ равен $m - 27^3$. По условию задачи число $m - n^3$ делится на $27 - n$, а значит, и остаток $m - 27^3$ должен делиться на $27 - n$. Выражение $27 - n$ может принимать все целые значения кроме нуля, поэтому $m - 27^3$ должно равняться нулю. Значит, $m = 27^3$. ■

Задача 7. На сферическом Солнце обнаружено конечное число круглых пятен, каждое из которых занимает меньше половины поверхности Солнца. Эти пятна предполагаются замкнутыми (т.е. граница пятна принадлежит ему) и не пересекаются между собой. Доказать, что на Солнце найдутся две диаметрально противоположные точки, не покрытые пятнами.

Решение. Рассмотрим самое большое пятно S. Известно, что оно занимает меньше половины Солнца. Рассмотрим S' — ε-раздутие пятна S. Поскольку S не пересекается с остальными пятнами (которых конечное число) и покрывает меньше половины поверхности Солнца, ε можно подобрать так, чтобы S' удовлетворяло этим же свойствам. Пусть ω_1 — окружность, ограничивающая S'. Из построения S' следует, что ни одна точка ω_1 не покрыта пятнами.

Рассмотрим ω_2 — образ ω_1 при симметрии относительно центра Солнца. Эта окружность не может быть покрыта целиком каким-то одним пятном (так как S было самым большим пятном), но и не может целиком быть покрыта несколькими пятнами (так как каждое из них замкнуто и высекает на ω_2 замкнутую дугу; полученные дуги не пересекаются). Значит, на ω_2 найдётся точка, не покрытая ни одним пятном. Пара из этой точки и симметричной к ней (которая лежит на ω_1) и будет искомой. ■