

Определение 4. Пусть функция f определена на множестве M и некоторая левая проколотая полуокрестность окрестность точки a вложена в M . Число b называется *пределом слева функции f в точке a* , если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x из множества $\dot{U}_\delta^-(a) \cap M$ выполняется условие $f(x) \in U_\varepsilon(b)$.

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$.

Задача 9. а) Запишите определение 4 формально (при помощи кванторов).

б) Сформулируйте (в т.ч. на языке кванторов) определение предела справа.

Задача 10°. Пусть функция f имеет пределы справа и слева в точке a . Докажите, что предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$.

Задача 11. Приведите пример функции на \mathbb{R} , которая в точке a :

а) не имеет предела ни слева, ни справа;

б) имеет предел слева, но не имеет предела справа;

в) имеет разные пределы слева и справа.

Задача 12°. Докажите, что функция, монотонная на интервале (a, b) , имеет предел как слева, так и справа в каждой точке этого интервала.

Определение 5. Пусть функция f определена на множестве M и найдётся число $S \in \mathbb{R}$, такое что множество $\{x \in \mathbb{R}: |x| > S\}$ вложено в M . Число b называется *пределом функции f при x , стремящемся к ∞* , если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $C > 0$, что для всех $x \in M$ из неравенства $|x| > C$ следует $f(x) \in U_\varepsilon(b)$.

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ или $f(x) \rightarrow b$ при $x \rightarrow \infty$.

Задача 13. а) Запишите определение 5 формально (при помощи кванторов).

б) Сформулируйте определение предела функции f при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$.

в) Сформулируйте следующее определение: предел функции f при x , стремящемся к a , равен ∞ (соответственно $+\infty$, $-\infty$). Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Задача 14. Пусть функция f не обращается в ноль в некоторой окрестности точки a . Докажите, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Задача 15*. Верно ли, что если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$, то $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$?

Задача 16*. Приведите пример функции, определённой на \mathbb{R} , не равной тождественно нулю ни на каком интервале, но имеющей в каждой точке нулевой предел.

Задача 17*. Приведите пример функции, определённой на \mathbb{Q} и имеющей в каждой точке бесконечный предел.

[illegible]