

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Глава 5

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

§ 5.1. ЗНАЧЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Какую бы систему взаимодействующих тел мы ни рассматривали, будь то Солнечная система или сталкивающиеся бильярдные шары, у тел системы с течением времени непрерывно изменяются координаты и скорости. В этом, разумеется, нет ничего неожиданного. Замечательным является то, что в системе тел, на которую не действуют внешние силы (такую систему называют замкнутой), имеется ряд величин, зависящих от координат и скоростей (но не ускорений) всех тел системы, которые при движении тел не изменяются со временем. К таким сохраняющимся величинам относится импульс (или количество движения), энергия и момент импульса (момент количества движения). Все они, как говорят, подчиняются соответствующим законам сохранения.

Мы рассмотрим подробно два закона сохранения: закон сохранения импульса и закон сохранения энергии. С законом сохранения момента импульса познакомимся на простых частных примерах.

Роль законов сохранения

Значение законов сохранения в механике и в физике вообще огромно. Эти законы позволяют сравнительно простым путем, без рассмотрения действующих на тела сил и без прослежива-

ния движения тел системы решать ряд практически важных задач, что мы увидим в дальнейшем.

Кроме того, и это самое главное, открытые в механике законы сохранения импульса, энергии и момента импульса играют во всей физике огромную роль, далеко выходящую за рамки самой механики. Даже в тех условиях, когда законы механики Ньютона применять нельзя (например, для движения электронов в атоме), законы сохранения механических величин не теряют своего значения. Они применимы как к телам обычных размеров, так и к космическим телам и элементарным частицам.

Именно всеобщность законов сохранения, их применимость ко всем явлениям природы, а не только к механическим, делают эти законы очень важными.

Законы сохранения незаменимы, когда исследователи начинают проникать во вновь открытую сферу неизвестного. Так было при зарождении физики элементарных частиц. Сущность явлений лежала пока во тьме, были известны только отдельные факты. В этих условиях законы сохранения служили единственной надежной путеводной нитью для исследователей. Не зная еще сущности явлений в новой области, ученые с полным правом могли утверждать, что и здесь законы сохранения известных нам величин имеют место. Эта вера в надежность основных законов сохранения никогда еще не подводила исследователей и часто дарила им замечательные открытия. Так, открытие новой элементарной частицы — нейтрино обязано закону сохранения энергии.

Связь законов сохранения со свойствами пространства и времени

Особенно отчетливо значение законов сохранения механических величин выяснилось после того, как в XX в. была установлена связь этих законов со свойствами пространства и времени.

Закон сохранения импульса связан с однородностью пространства, с тем, что все точки пространства совершенно равноправны. Перенос (сдвиг) в пространстве какой-либо механической системы никак не влияет на процессы внутри нее. Доказательство того, что из однородности пространства следует закон сохранения импульса, слишком сложно, и мы на нем не можем остановиться.

Закон сохранения энергии связан с однородностью времени, с тем, что все моменты времени равноправны и мы можем лю-

бой момент взять за начало отсчета времени. Доказательство связи закона сохранения энергии с однородностью времени также сложно. Ограничимся одним примером. Если бы сила притяжения тел к Земле изменялась со временем (т. е. не все моменты времени были бы равноценны) периодически, то энергия не сохранялась. Мы могли бы поднимать тела вверх в момент ослабления притяжения к Земле, совершая некоторую работу, и опускать их вниз в моменты увеличения силы притяжения. Выигрыш в работе был бы налицо.

Закон сохранения момента импульса связан с изотропностью пространства, с тем, что его свойства одинаковы по всем направлениям.

§ 5.2. ИМПУЛЬС МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ДРУГАЯ ФОРМУЛИРОВКА ВТОРОГО ЗАКОНА НЬЮТОНА

Введем новую физическую величину — импульс материальной точки. Дадим другую формулировку второго закона Ньютона.

Импульс материальной точки

Второй закон Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ можно записать в иной форме, которая приведена самим Ньютоном в его главном труде «Математические начала натуральной философии».

Если на тело (материальную точку) действует постоянная сила, то постоянным является и ускорение

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t},$$

где \vec{v}_1 и \vec{v}_2 — начальное и конечное значения скорости тела.

Подставив это значение ускорения во второй закон Ньютона, получим:

$$\frac{m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{\Delta t} = \vec{F},$$

или

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}\Delta t. \quad (5.2.1)$$

В этом уравнении появляется новая физическая величина — импульс материальной точки.

Импульсом материальной точки называют величину, равную произведению массы точки на ее скорость.

Обозначим импульс (его также называют иногда количеством движения) буквой \vec{p} . Тогда

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (5.2.2)$$

Из формулы (5.2.2) видно, что импульс — векторная величина. Так как $m > 0$, то импульс имеет то же направление, что и скорость (рис. 5.1).

Единица импульса не имеет особого названия. Ее наименование получается из определения этой величины:

$$\text{единица импульса в СИ} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Другая форма записи второго закона Ньютона

Обозначим через $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$ импульс материальной точки в начальный момент интервала Δt , а через $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$ — импульс в конечный момент этого интервала. Тогда $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$ есть изменение импульса за время Δt . Теперь уравнение (5.2.1) можно записать так:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t. \quad (5.2.3)$$

Так как $\Delta t > 0$, то направления векторов $\Delta\vec{p}$ и \vec{F} совпадают. Согласно формуле (5.2.3) изменение импульса материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет такое же направление, как и сила.

Именно так был впервые сформулирован второй закон Ньютона.

Произведение силы на время ее действия называют иногда импульсом силы. (Не надо путать импульс $m\vec{v}$ материальной точки и импульс силы $\vec{F}\Delta t$. Это совершенно разные понятия.)

Уравнение (5.2.3) показывает, что одинаковые изменения импульса материальной точки могут быть получены в результате действия большой силы в течение малого интервала времени или малой силы за большой интервал времени. Когда вы прыгаете с

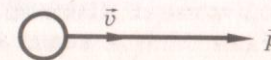


Рис. 5.1



Рис. 5.2

какой-то высоты, то остановка вашего тела происходит за счет действия силы со стороны земли или пола. Чем меньше продолжительность столкновения, тем больше тормозящая сила. Для уменьшения этой силы надо, чтобы торможение происходило постепенно. Вот почему при прыжках в высоту спортсмены приземляются на мягкие маты. Прогибаясь, они постепенно тормозят спортсмена.

Формула (5.2.3) может быть обобщена и на тот случай, когда сила меняется во времени. Для этого весь промежуток времени Δt действия силы надо разделить на столь малые интервалы Δt_i , чтобы на каждом из них значение силы без большой ошибки можно было считать постоянным. Для каждого малого интервала времени справедлива формула (5.2.3). Суммируя изменения импульсов за малые интервалы времени, получим¹:

$$\Delta \vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \Delta t_i. \quad (5.2.4)$$

Импульс системы материальных точек

Импульс системы материальных точек равен векторной сумме импульсов всех точек.

Для нахождения импульса тела поступают так: мысленно разбивают тело на отдельные элементы (материальные точки), находят импульсы полученных элементов, а потом их суммируют как векторы. Импульс тела равен сумме импульсов его отдельных элементов.

Мы познакомились с новой физической величиной — импульсом $\vec{p} = m\vec{v}$. Это позволило записать второй закон Ньютона в форме $\Delta \vec{p} = \vec{F}\Delta t$.

- ? 1. Две материальные точки равной массы движутся навстречу друг другу с равными по модулю скоростями. Чему равен импульс системы точек?
2. Чему равен импульс однородного диска, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис. 5.2)?

¹ Символ Σ (греческая буква «сигма») означает «сумма». Индексы $i = 1$ (внизу) и N (наверху) означают, что суммируется N слагаемых.

§ 5.3. ИЗМЕНЕНИЕ ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ ТЕЛ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

При рассмотрении любой механической задачи мы интересуемся движением определенного числа тел. Совокупность тел, движение которой мы изучаем, называется механической системой или просто системой. Как изменяется импульс системы тел?

Изменение импульса системы тел

Рассмотрим систему, состоящую из трех тел. Это могут быть три звезды, испытывающие воздействие со стороны соседних космических тел. На тела системы действуют внешние силы \vec{F}_i (i — номер тела; например, \vec{F}_2 — это сумма внешних сил, действующих на тело номер два). Между телами действуют силы \vec{F}_{ik} , называемые внутренними силами (рис. 5.3). Здесь первая буква i в индексе означает номер тела, на которое действует сила \vec{F}_{ik} , а вторая буква k означает номер тела, со стороны которого действует данная сила. На основании третьего закона Ньютона

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}. \quad (5.3.1)$$

Вследствие действия сил на тела системы их импульсы изменяются. Если за малый промежуток времени сила заметно не меняется, то для каждого тела системы можно записать изменение импульса в форме уравнения (5.2.3):

$$\begin{aligned} \Delta(m_1 \vec{v}_1) &= (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_1) \Delta t, \\ \Delta(m_2 \vec{v}_2) &= (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_2) \Delta t, \\ \Delta(m_3 \vec{v}_3) &= (\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_3) \Delta t. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

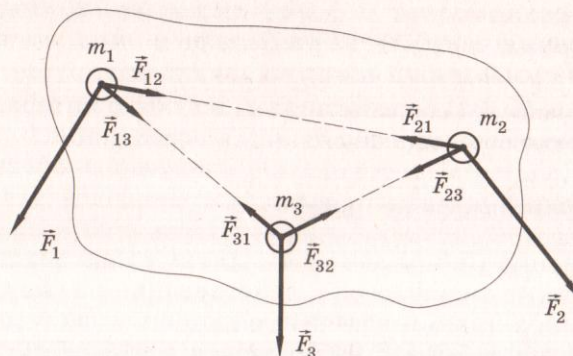


Рис. 5.3

Здесь в левой части каждого уравнения стоит изменение импульса тела $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ за малое время Δt .

Более подробно: $\Delta(m_i \vec{v}_i) = m_i \vec{v}_{i\kappa} - m_i \vec{v}_{i\text{н}}$, где $\vec{v}_{i\text{н}}$ — скорость в начале, а $\vec{v}_{i\kappa}$ — в конце интервала времени Δt .

Сложим левые и правые части уравнений (5.3.2) и покажем, что сумма изменений импульсов отдельных тел равна изменению суммарного импульса всех тел системы, равного

$$\vec{p}_c = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3. \quad (5.3.3)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \Delta(m_1 \vec{v}_1) + \Delta(m_2 \vec{v}_2) + \Delta(m_3 \vec{v}_3) = \\ & = m_1 \vec{v}_{1\kappa} - m_1 \vec{v}_{1\text{н}} + m_2 \vec{v}_{2\kappa} - m_2 \vec{v}_{2\text{н}} + m_3 \vec{v}_{3\kappa} - m_3 \vec{v}_{3\text{н}} = \\ & = (m_1 \vec{v}_{1\kappa} + m_2 \vec{v}_{2\kappa} + m_3 \vec{v}_{3\kappa}) - (m_1 \vec{v}_{1\text{н}} + m_2 \vec{v}_{2\text{н}} + m_3 \vec{v}_{3\text{н}}) = \\ & = \vec{p}_{c,\kappa} - \vec{p}_{c,\text{н}} = \Delta \vec{p}_c. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta \vec{p}_c = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) \Delta t. \quad (5.3.4)$$

Но силы взаимодействия любой пары тел в сумме дают нуль, так как согласно формуле (5.3.1)

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}, \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}.$$

Поэтому изменение импульса системы тел $\Delta \vec{p}_c$ равно импульсу внешних сил:

$$\Delta \vec{p}_c = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) \Delta t. \quad (5.3.5)$$

Мы пришли к важному выводу: *импульс системы тел могут изменить только внешние силы, причем изменение импульса системы пропорционально сумме внешних сил и совпадает с ней по направлению. Внутренние силы, изменяя импульсы отдельных тел системы, не изменяют суммарный импульс системы.*

Уравнение (5.3.5) справедливо для любого интервала времени, если сумма внешних сил остается постоянной.

Закон сохранения импульса

Из уравнения (5.3.5) вытекает чрезвычайно важное следствие. Если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то равно нулю и изменение импульса системы: $\Delta \vec{p}_c = 0$. Это означает, что, какой бы интервал времени мы ни взяли, суммарный импульс в начале этого интервала $\vec{p}_{c,\text{н}}$ и в его конце

$\vec{p}_{c,\kappa}$ один и тот же: $\vec{p}_{c,\text{н}} = \vec{p}_{c,\kappa}$. Импульс системы остается неизменным, или, как говорят, сохраняется:

$$\vec{p}_c = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 = \text{const.} \quad (5.3.6)$$

Закон сохранения импульса формулируется так: **если сумма внешних сил, действующих на тела системы, равна нулю, то импульс системы сохраняется.** Тела могут только обмениваться импульсами, суммарное же значение импульса не изменяется. Надо только помнить, что сохраняется векторная сумма импульсов, а не сумма их модулей.

Как видно из проделанного нами вывода, закон сохранения импульса является следствием второго и третьего законов Ньютона. Система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой* или *изолированной*. В замкнутой системе тел импульс сохраняется. Но область применения закона сохранения импульса шире: если даже на тела системы действуют внешние силы, но их сумма равна нулю, импульс системы все равно сохраняется.

Полученный результат легко обобщается на случай системы, содержащей произвольное число N тел:

$$\begin{aligned} & m_1 \vec{v}_{1\text{н}} + m_2 \vec{v}_{2\text{н}} + m_3 \vec{v}_{3\text{н}} + \dots + m_N \vec{v}_{N\text{н}} = \\ & = m_1 \vec{v}_{1\kappa} + m_2 \vec{v}_{2\kappa} + m_3 \vec{v}_{3\kappa} + \dots + m_N \vec{v}_{N\kappa}. \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Здесь $\vec{v}_{i\text{н}}$ — скорости тел в начальный момент времени, а $\vec{v}_{i\kappa}$ — в конечный. Так как импульс — величина векторная, то уравнение (5.3.7) представляет собой компактную запись трех уравнений для проекций импульса системы на координатные оси.

Когда выполняется закон сохранения импульса?

Все реальные системы, конечно, не являются замкнутыми, сумма внешних сил довольно редко может оказаться равной нулю. Тем не менее в очень многих случаях закон сохранения импульса можно применять.

Если сумма внешних сил не равна нулю, но равна нулю сумма проекций сил на какое-то направление, то проекция импульса системы на это направление сохраняется. Например, система тел на Земле или вблизи ее поверхности не может быть замкнутой, так как на все тела действует сила тяжести, которая изменяет импульс по вертикали согласно уравнению (5.3.5). Однако вдоль горизонтального направления сила тяжести не может изменять импульс, и сумма проекций импульсов тел на горизонтально направленную ось будет оставаться неизменной, если действием сил сопротивления можно пренебречь.

Кроме того, при быстрых взаимодействиях (взрыв снаряда, выстрел из орудия, столкновения атомов и т. п.) изменение импульсов отдельных тел будет фактически обусловлено только внутренними силами. Импульс системы сохраняется при этом с большой точностью, ибо такие внешние силы, как сила тяготения и сила трения, зависящая от скорости, заметно не изменяет импульса системы. Они малы по сравнению с внутренними силами. Так, скорость осколков снаряда при взрыве в зависимости от калибра может изменяться в пределах 600—1000 м/с. Интервал времени, за который сила тяжести смогла бы сообщить телам такую скорость, равен

$$\Delta t = \frac{m\Delta v}{mg} \approx 100 \text{ с.}$$

Внутренние же силы давления газов сообщают такие скорости за 0,01 с, т. е. в 10 000 раз быстрее.

Из второго и третьего законов Ньютона мы получили важнейшее следствие — закон сохранения импульса. Если сумма внешних сил равна нулю, то импульс системы сохраняется. Закон сохранения импульса выполняется для любых систем — будь то космические тела, атомы или элементарные частицы.

- ? 1. Чему равна сумма сил, действующих между молекулами воды в стакане?
2. Навстречу друг другу летят с равными по модулю скоростями два одинаковых пластилиновых шарика. После столкновения шарики останавливаются. Куда деваются их импульсы?
3. В лежащий на столе брусок попадает пуля, летящая горизонтально, и застревает в нем. Можно ли для нахождения скорости бруска с пулей применить закон сохранения импульса, несмотря на наличие трения?