## Выпуклые функции

**Определение 1.** Функцию $f : I \to \mathbb{R}$ называют *выпуклой вниз* на промежутке $I$, если для каждого отрезка $[x_1; x_2] \subseteq I$ выполнено: в каждой точке $x$ этого отрезка $f(x) \leqslant L(x)$, где $L$ — прямая, соединяющая $(x_1; f(x_1))$ и $(x_2; f(x_2))$. Если всегда (кроме концов отрезков) верно строгое неравенство $f(x) < L(x)$, говорят о *строгой* выпуклости вниз. Аналогично определяют (строгую) выпуклость вверх.

**Задача 1.** Пусть функция $f$ определена на интервале $(a, b)$. Докажите, что $f$ выпукла вниз на $(a, b)$ тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:

**а)** надграфик $f$ на $(a; b)$, то есть $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a, b), y \geqslant f(x)\}$ — выпуклое множество;

**б)** $\alpha \cdot f(x) + (1 - \alpha) \cdot f(y) \geqslant f(\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y)$ для любых $x, y \in (a, b)$ и любого $\alpha \in [0, 1]$;

**в)** *(неравенство Йенсена)* $\frac{\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \geqslant f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\right)$ для любых чисел $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$ и любых положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

**Задача 2.** Пусть $f$ положительна и выпукла вниз на $[a; b]$. Обязательно ли $1/f$ выпукла вверх на $[a; b]$?

**Задача 3.** Докажите, что если функция $f$ выпукла вниз на $(a, b)$, то $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ при любых $x_1 < x < x_2$, где $x, x_1, x_2 \in (a, b)$.

**Задача 4.** Пусть функция $f$ дважды дифференцируема ($f$ и $f'$ дифференцируемы) на интервале $(a, b)$. Докажите, что $f$ выпукла вниз на $(a, b)$ если и только если выполнено любое из следующих условий:

**а)** $f'$ монотонно неубывает на интервале $(a, b)$; **б)** $f''(x) \geqslant 0$ для любого $x \in (a, b)$;

**в)** любая касательная $l$ к графику $f$ расположена не выше его: $f(x) \geqslant l(x)$ при всех $x \in (a, b)$.

**Задача 5.** Найдите промежутки выпуклости вверх и выпуклости вниз следующих функций:

**а)** $\sin x$; **б)** $x^2$; **в)** $x^3$; **г)** $x^4$; **д)** $\sqrt{|x|}$; **е)** $5x^4 + 7x^3$; **ж)** $\sin x + \cos x$; **з)** $(x(x-1))^{-1}$; **и)** $x^2 + \frac{1}{x}$.

**Задача 6.** Докажите, что **а)** $\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}$; **б)** $(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$.

**Задача 7.** Докажите для положительных $x_1, \ldots, x_n$ неравенство Коши: $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$.
*Указание:* вам поможет функция ln.

**Задача 8.** Что больше: $\sqrt[3]{60}$ или $2 + \sqrt[3]{7}$?

**Задача 9*.** Пусть $f$ выпукла (вниз или вверх) на $(a, b)$. **а)** Докажите, что $f(x)$ непрерывна на $(a, b)$.

**б)** Верно ли, что $f$ имеет в каждой точке из $(a, b)$ правую и левую касательные?

**в)** Докажите, что $f$ дифференцируема на $(a, b)$ везде кроме счётного числа точек.

## Точки перегиба

**Определение 2.** Точка $x_0$ называется *точкой перегиба* функции $f$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f$ строго выпукла вниз на $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и строго выпукла вверх на $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ (или наоборот).

**Задача 10.** Пусть $f$ дважды дифференцируема в некой окрестности точки $x_0$.

**а)** Пусть $x_0$ — точка перегиба функции $f$. Верно ли, что $f''(x_0) = 0$? Верно ли обратное?

**б)** Докажите, что $x_0$ — точка перегиба $f$ если и только если $f''$ меняет знак в точке $x_0$.

**Задача 11.** Нарисуйте графики функций из задачи 5 и найдите точки перегиба этих функций.

**Задача 12.** Пусть $f$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0$, причём $f'(x_0) = 0$ и **а)** $f''(x_0) > 0$; **б)** $f''(x_0) < 0$. Имеет ли $f$ в $x_0$ локальный экстремум, и если да, то какого типа?

**Задача 13.** Сколько перегибов у графика $y = (x + 1)/(x^2 + 1)$? Лежат ли они на одной прямой?

## Асимптоты

**Определение 3.** Прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $f(x) - (kx + b) \to 0$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$ (справа или слева).

**Задача 14.** Пусть $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = kx + b$ при $x \to +\infty$. Найдите $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$.

**Задача 15.** Пусть существует $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Обязательно ли тогда функция $f(x)$ имеет асимптоту?

| 1 а | 1 б | 1 в | 2 | 3 | 4 а | 4 б | 4 в | 5 а | 5 б | 5 в | 5 г | 5 д | 5 е | 5 ж | 5 з | 5 и | 6 а | 6 б | 7 | 8 | 9 а | 9 б | 9 в | 10 а | 10 б | 11 | 12 а | 12 б | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |