Листок №62 | **Производная. Экстремумы** | 26.02 – 12.03.2021
27/21/15 з. на 5/4/3

Задача 1. Пусть f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f'(x_0) > 0$ в точке $x_0 \in (a, b)$. **а)** Найдется ли такая окрестность U точки x_0, что для всех $x \in U$ если $x > x_0$, то $f(x) > f(x_0)$, а если $x < x_0$, то $f(x) < f(x_0)$? **б)** Верно ли, что f монотонно возрастает в некоторой окрестности x_0?

Определение 1. Говорят, что c — точка *локального максимума* f, если $f(c) \geqslant f(x)$ для всех x из некой окрестности c. Если верно строгое неравенство, говорят о *строгом* локальном максимуме. Аналогично определяют *(строгий) локальный минимум.* Вместе точки (строгого) локального максимума и минимума называют точками *(строгого) локального экстремума.*

Задача 2. **а)** *(Теорема Ферма)* Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Докажите, что если $x \in (a, b)$ — точка локального максимума (минимума) f, то $f'(x) = 0$. **б)** Верно ли обратное?

Задача 3. **а)** Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда максимум (минимум) f на $[a, b]$ достигается, причём точками максимума (минимума) могут быть только a, b и точки $x \in (a, b)$, где $f'(x) = 0$. **б)** Если f дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $f(x) \to +\infty$ при $x \to \pm\infty$, то минимум f на $\mathbb{R}$ достигается, и в точке минимума x обязательно $f'(x) = 0$.

Задача 4. Докажите для всех x: **а)** $x^4 + x^3 \geqslant -\frac{3^3}{4^4}$; **б)** $x^6 - 6x + 5 \geqslant 0$; **в)** $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 5 \geqslant 0$.

Задача 5. Найдите наибольшее и наименьшее значение при $x \in [0, 1]$ функций из задачи 4.

Задача 6. Найдите наименьшее значение при $x > 0$: **а)** $x + \frac{1}{x}$; **б)** $x + \frac{1}{x^2}$; **в)** $x^2 + 2x + \frac{4}{x}$.

Задача 7. *(Теорема Ролля)* Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), и, кроме того, $f(a) = f(b)$. Докажите, что найдётся такая точка $x \in (a, b)$, что $f'(x) = 0$.

Задача 8. *(Теорема Лагранжа)* Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Докажите, что найдётся такое $x \in (a, b)$, что $f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ и объясните геометрический смысл этой теоремы.

Задача 9. Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Докажите, что если для всех $x \in (a, b)$ выполнено: **а)** $f'(x) = 0$, то f постоянна на $[a, b]$. **б)** $f'(x) > 0$, то f возрастает на $[a, b]$.

Задача 10. Докажите, что для для всех $x > 0$ выполнены неравенства: **а)** $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$; **б)** $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$; **в)** $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, где $n \in \mathbb{N}$. **г)** $\sin x = \lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Задача 11. Найдите все дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции f, такие что $f'(x) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

***

Задача 12. **а)** Какую наибольшую площадь может иметь трапеция, три стороны которой равны 1?
б) Какова наибольшая возможная площадь четырёхугольника, 3 стороны которого равны 1?
в) У какого равностороннего шестиугольника со стороной 1 площадь наибольшая?

Задача 13. Из пункта A, находящегося в лесу в 5 км от прямой дороги, пешеходу нужно попасть в пункт B, расположенный на этой дороге в 13 км от A. Наибольшая скорость пешехода на дороге — 5 км/ч, а в лесу — 3 км/ч. За какое наименьшее время пешеход сможет попасть из A в B?

Задача 14. Даны точки A и B по разные стороны от прямой l, разделяющей две среды. Скорость света в верхней среде — v_1, а в нижней — v_2. Пусть D — такая точка на l, что время преодоления светом пути ADB минимально. Докажите, что D существует и определяется условием $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = v_1 / v_2$, где α_1 и α_2 — углы, образованные прямыми AD и BD с прямой, проходящей через D перпендикулярно l.

Задача 15. Найдите точку параболы $y = x^2$, ближайшую к точке $(-1; 2)$.

Задача 16. В круглый бокал, осевое сечение которого — график функции $y = x^4$, опускают вишенку — шар радиусом r. При каком наибольшем r шар коснётся нижней точки дна?

Задача 17. Пусть f определена и дифференцируема на (a, b). **а)** Верно ли, что f' непрерывна на (a, b)? **б)** (*Теорема Дарбу*) Пусть $[c, d] \subset (a, b)$. Докажите, что f' принимает на $[c, d]$ все значения между $f'(c)$ и $f'(d)$. **в)** Пусть f' имеет пределы слева и справа в точке $x_0 \in (a, b)$. Верно ли, что они совпадают?

Задача 18. Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки a, причём a — точка строгого локального минимума f. Всегда ли найдётся ли такая окрестность точки a, что $f'(x) < 0$ для всех $x < a$ из этой окрестности, и $f'(x) > 0$ для всех $x > a$ из этой окрестности?

1 а	1 б	2 а	2 б	3 а	3 б	4 а	4 б	4 в	5	6 а	6 б	6 в	7	8	9 а	9 б	10 а	10 б	10 в	10 г	11	12 а	12 б	12 в	13	14	15	16	17 а	17 б	17 в	18