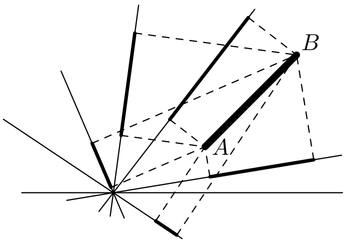
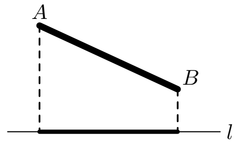
Вариация кривой

Определение 1. Пусть на плоскости дан отрезок AB длины 1. Для каждой прямой l в этой плоскости определим *вариацию отрезка AB в направлении l* как длину проекции отрезка AB на прямую l (см. рис. справа). Обозначение: $V_l(AB)$ или просто V_l, если ясно, от какого отрезка берется вариация.

Определение 2. Интуитивно ясно, что существует среднее значение вариации по всем направлениям и что оно больше 0 и меньше 1. Более точно это означает, что если разделить угол в 360° на n равных частей и взять среднее арифметическое





$$V_n = \frac{V_{l_1} + V_{l_2} + \cdots + V_{l_n}}{n}$$

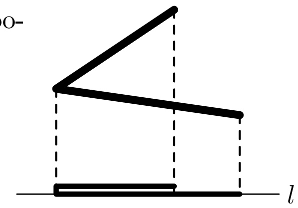
вариаций отрезка AB в направлениях $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (см. рис. слева), то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = K$, причем K заключено между 0 и 1. Это число K называется *вариацией* единичного отрезка AB. (Мы вычислим число K позже.)

Задача 1. Найдите вариацию отрезка длины a (выразите через K).

Задача 2*. **а)** Докажите, что число K существует. (Указание: вспомните определение равномерной непрерывности.) **б)** Докажите, что K не зависит от выбора направления l_1.

Замечание. Задачей 2 можно пользоваться далее без доказательства.

Определение 3. *Вариацией ломаной по какому-нибудь направлению* называется сумма длин проекций ее звеньев на это направление (см. рис.).

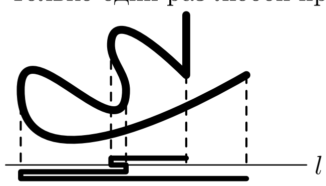


Задача 3. Найти вариации единичного квадрата в направлениях сторон и диагоналей.

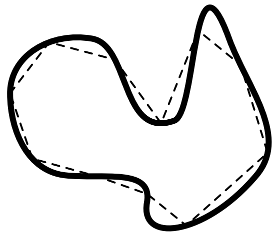
Определение 4. *Средняя вариация ломаной* (или просто *вариация ломаной)* по всем направлениям определяется, как и выше, с помощью предельного перехода.

Задача 4. Найдите вариацию ломаной длины a, выразив через K.

Перенесение понятия вариации на кривые требует уточнения понятия кривой. В общем случае это сделать трудно. Но пусть кривая выпуклая или состоит из нескольких выпуклых кусков. Тогда при проектировании кривой на любое, но определенное направление, можно разбить ее на конечное число кусков, каждый из которых пересекается только один раз любой проектирующей прямой (здесь не исключаются случаи, когда подобный кусок представляет собой прямолинейный отрезок и, следовательно, при проектировании в одном из направлений полностью попадает на проектирующую прямую). Тогда *вариацией кривой по выбранному направлению* назовем сумму длин проекций ее кусков на это направление (см. рис. слева.). Можно показать, что существует среднее значение этой величины по всем направлениям. Его мы и назовем *средней вариацией* или просто *вариацией)* кривой линии. Очевидно, если кривая — ломаная, то мы приходим к прежнему определению.



Задача 5. Найдите вариацию окружности диаметра D.



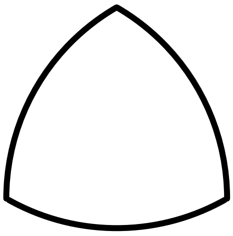
Выберем теперь на кривой несколько точек и соединим их последовательно, но подряд (см. рис.) Получим ломаную. Можно показать, что для достаточно хороших (например, для кривых, которые могут быть разбиты на конечное число выпуклых кусков) кривых существует предел длин этих ломаных, при условии, что при изменении ломаной длина ее наибольшего звена стремится к нулю. Этот предел называется *длиной кривой.*

Задача 6. Найдите предел, к которому стремится вариация ломаной, вписанной в «достаточно хорошую» кривую длины a, когда ломаная изменяется так, что длина наибольшего ее звена стремится к нулю.

Задача 7. Найдите вариацию «достаточно хорошей» кривой длины a, выразив через K.

Задача 8. Найдите вариацию отрезка длины 1, используя результаты задач 3, 4 и 5.

Определение 5. *Шириной кривой по данному направлению* называется наименьшее расстояние между двумя прямыми этого направления, между которыми лежит кривая. Кривая имеет *постоянную ширину,* если ее ширина по всем направлениям одинакова. Простейшим примером такой кривой является окружность.



Задача 9. Отметим на плоскости вершины любого правильного треугольника и соединим каждые две вершины дугой окружности с центром в третьей вершине. Получится так называемый *треугольник Релло* (см. рис. слева). Докажите, что треугольник Релло — кривая постоянной ширины.

Задача 10. (*Теорема Барбье*) Пусть кривая постоянной ширины h является границей выпуклой фигуры. Найдите длину такой кривой.

Задача 11. В круге радиуса 1 заключена какая-то кривая L длины 22. Докажите, что найдется прямая, пересекающая L не менее чем в 8 точках.

Задача 12. Один прямоугольник находится внутри другого. Докажите, что тогда его периметр меньше.

1	2 а	2 б	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12