

**Задача 1.** Пусть  $(x_n)$  — последовательность положительных чисел, стремящаяся к  $a$ . Докажите<sup>1</sup>, что тогда для любого  $k \in \mathbb{N}$  существует предел последовательности  $(\sqrt[k]{x_n})$ , равный  $\sqrt[k]{a}$ .

**Задача 2.** Пусть  $a, b > 0$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Докажите, что выполнено неравенство  $\frac{a^{n+1}}{b^n} \geq (n+1)a - nb$ .

**Задача 3.** (о числе  $e$ ) Докажите, что

- а) последовательность  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  монотонно возрастает;
- б) последовательность  $E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  монотонно убывает;
- в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$  (число  $e$  по определению равно пределу этих последовательностей);
- г) выполнено неравенство  $2,25 < e < 3,375$  (компьютер использовать нельзя);
- д) Найдите такое  $n$ , что  $|e - e_n| < 10^{-6}$  (компьютер использовать нельзя).

**Задача 4.** (о числе  $e^r$ ) Докажите, что а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$ , если число  $k$  — целое; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$ , если число  $r$  — рационально;

г)\* одна из последовательностей  $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$  и  $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n+r}$  монотонно возрастает, другая — монотонно убывает (начиная с какого-то момента), и пределы обеих последовательностей равны  $e^r$ .

**Задача 5.** Обозначим сумму  $\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$  через  $s_n$ , а число  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  через  $e_n$ .

- а) Докажите, что для любого натурального  $n$  выполнено неравенство  $e_n \leq s_n$ ;
- б) Зафиксируем натуральное число  $N$  и рассмотрим любое натуральное  $n > N$ . Раскроем скобки в выражении  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  по биному Ньютона и оставим лишь первые  $N+1$  слагаемых. Докажите, что предел полученной таким образом последовательности равен  $s_N$ ;

в) Докажите, что  $s_N \leq e$ ;

г) Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e$ ;

д)\* Докажите, что  $\sum_{i=m}^n \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}}$ ;

е)\* Найдётся ли  $n < 100$  такое, что  $|e - s_n| < 10^{-6}$ ? (Компьютер использовать нельзя.)

ж)\* Докажите, что для любого  $r \in \mathbb{Q}$  существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{r^i}{i!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r^1}{1!} + \dots + \frac{r^n}{n!}\right) = e^r$ .

**Задача 6.** Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$ . (Подсказка: тэжомоп мовэрдэ мынэпэтнандү аэрдэ & рэмон врэдвэ)

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 |
| а | б | в | г | д | а | б | в | г | а | б | в | г | д | е | ж |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

<sup>1</sup>(Подсказка: эрэдвэ йоте я н онтэмү энйвэя тэдүд эоннэжрпоз вн эннэжонмоД)