Еще одна подстановка

Задача 1. Решите системы:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 4xy(2y^2-1)=1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=2x^2-1 \\ z=2y^2-1 \\ x=2z^2-1 \end{cases}$

Задача 2. Докажите, что среди семи различных чисел всегда можно выбрать два числа x, y так, чтобы выполнялось неравенство $0<\dfrac{x-y}{1+xy}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 3. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z^2+t^2=9 \\ xt+yz=6 \end{cases}$$

выберите те, для которых величина $x+z$ принимает наибольшее значение.

Задача 4. Решите уравнения:

а) $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$;

б) $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$;

в) $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$;

г) $\sqrt{\dfrac{1-|x|}{2}}=2x^2-1$.

Задача 5. Последовательность $\{h_n\}$ задана условиями:

$$h_1=\frac{1}{2}, \qquad h_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}$$

Докажите неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k<1,03$.

Задача 6. Сколько корней на отрезке $[0;1]$ имеет уравнение $8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1$?

Задача 7. Решите уравнение $|2x-\sqrt{1-4x^2}|=\sqrt{2}(8x^2-1)$.

Задача 8*. Числа x, y, z удовлетворяются соотношению $xy+yz+zx=1$. Докажите, что существуют α, β, γ, такие что $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ и выполняются равенства

$$x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\ y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},\ z=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

Задача 9.

а) $\begin{cases} x+3y=4y^3 \\ y+3z=4z^3 \\ z+3x=4x^3 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x+x^2y=y \\ 2y+y^2z=z \\ 2z+z^2x=x \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\dfrac{2y}{1+y^2}\cdot\dfrac{1-z^2}{1+z^2} \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5\left(z+\dfrac{1}{z}\right) \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$

Задача 10. Пусть $xy+yz+zx=1$. Докажите равенство

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$