# Подстановка в кубический многочлен

**Задача 1**. Числа $a, b, c$ удовлетворяют неравенствам $a + c < b$, $c > 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$.

**Задача 2**. Три числа $x, y, z$ подобраны так, что их сумма, произведение, и сумма попарных произведений положительны. Докажите, что каждое из них положительно.

**Задача 3**. Целые числа $a, b, c$ таковы, что числа $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ и $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$ тоже целые. Докажите, что $|a| = |b| = |c|$.

**Задача 4**. Известно, что целые числа $a, b, c$ удовлетворяют равенству $a + b + c = 0$. Докажите, что $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ — квадрат целого числа.

**Задача 5**. **а)** Для каждого числа $x$ из множества $\{-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2\}$ нарисуйте на плоскости $pOq$ график прямой, задающейся уравнением $x^3 + px + q = 0$.

**б)** Задайте уравнением множество всех таких точек $(p; q)$, что многочлен $x^3 + px + q = 0$ имеет кратный корень.

**в)** Нарисуйте это множество на плоскости $pOq$, а также множества, где многочлен $x^3+px+q = 0$ имеет три разных корня, корень кратности 3, корень кратности 2, не имеет корней.

**г)** Сколько корней у многочлена $x^3 - 10x + 12$?

**д)*** Докажите, что все прямые вида $x^3 + px + q = 0$ на плоскости $pOq$ касаются некоторой кривой. Что это за кривая?

**Задача 6**. Числа $x, y, z$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел равно $a$.

**Задача 7**. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то $2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

**Задача 8**. Числа $a, b, c$ Являются тремя из четырех корней многочлена $x^4 - ax^3 - bx + c$. Найдите все такие многочлены.

**Задача 9**. У Феди есть три палочки. Если из них нельзя сложить треугольник, Федя укорачивает самую длинную из палочек на сумму длин двух других. Если длина палочки не обратилась в нуль и треугольник снова нельзя сложить, то Федя повторяет операцию, и т. д. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

**Задача 10**. Найдите зависимость между коэффициентами кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, если известно, что сумма двух его корней равна произведению этих корней.

**Задача 11**. Числа $x, y, z$ удовлетворяют равенству $x + y + z - 2(xy + yz + xz) + 4xyz = \frac{1}{2}$. Докажите, что хотя бы одно из них равно $\frac{1}{2}$.

**Задача 12**. Даны такие действительные числа $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3$, что равны их суммы и попарные произведения: $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$; $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1$. Докажите, что, если $a_1 \leqslant b_1$, то $a_3 \leqslant b_3$.

**Задача 13**. Путь $a, b, c$ — стороны треугольника, $p$ — его полупериметр, а $r$ и $R$ — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно. Составьте уравнение с коэффициентами, зависящими от $p, r, R$, корнями которого являются числа $a, b, c$. Докажите равенство

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{1}{2Rr}$$

В листке использованы материалы СОШ №179 и ТЛ «$2 \times 2$»; Преподаватель — Рудько Ю. А.