

Уравнения с параметром

Квадратный трехчлен

Задача 1. Определите, сколько существует различных значений a , при которых уравнение

$$(1 - a^2)x^2 + ax + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

Задача 2. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 4ax + 5a$ равна 6?

Задача 3. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 2ax + 2a - 5 = 0$ будет наименьшей?

Задача 4. При каких значениях a уравнение $(a - 3)x^2 - 2ax + 5a = 0$ имеет только положительные корни?

Задача 5. Найдите все такие a , что решения неравенства $x^2 + (a - 5)x - 2a^2 + 2a + 4 \leq 0$ образуют отрезок, длина которого больше 6.

Задача 6. Докажите, что уравнение $(a^2 - a + 1)x^2 + (2a^2 + 10a + 3)x - 4a^2 - 9a - 5 = 0$ имеет два различных корня при любом a .

Задача 7. При каких значениях a один из корней уравнения $x^2 + ax + 4 = 0$ меньше 2, а другой — больше?

Задача 8. При каких значениях p уравнение $\sin^2 x + p \sin x = p^2 - 1$ имеет решения?

Домашнее задание.

Задача 9. При каких значениях a один из корней уравнения $ax^2 + 2x + 2a + 1 = 0$ меньше 1, а другой — больше?

Задача 10. При каких a корни уравнения $ax^2 + (4 - 2a)x + 1 = 0$ по модулю меньше 1?

Задача 11. При каких значениях a неравенство $3 \cdot 4^x - 6a \cdot 2^x + 3a^2 + 2a - 14 < 0$ не имеет решений?

Уравнения с параметром

Параметры и переменные

Задача 1. Найдите все значения a , при которых множество решений неравенства $\frac{a}{x-a} > 0$ содержит точку $x = 1$.

$$\left[\begin{array}{l} a > 0 \\ x - a > 0 \\ x = 1 \\ a < 0 \\ x - a < 0 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

а) Решите эту задачу, доказав, что условие эквивалентно системе

б) Решите неравенство $\frac{a}{1-a} > 0$;

в) Объясните, почему ответы в предыдущих пунктах получились одинаковые.

Задача 2. При каких значениях параметра a уравнение $2x^4 + 9ax + 7a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень?

Задача 3. Найдите все a , при которых неравенство $\frac{x-2a-1}{x-a} < 0$ выполнено для всех $x \in [1; 2]$.

Задача 4. Найдите все x , при которых неравенство $(a+2)x^3 - (1+2a)x^2 - 6x + a^2 + 4a - 5 > 0$ выполняется хотя бы для одного $a \in [-2; 1]$.

Задача 5. Найдите все a , при которых множество решений неравенства $\frac{a+2-2^{x-2}}{a+3} \geq \frac{5a+5}{2(2^x+3a+3)}$ содержит какой-либо луч на прямой.

Домашнее задание

Задача 6. При всех a решите уравнение $\frac{a(x-a)}{x-2} = 0$.

Задача 7. При каких значениях a уравнение $\frac{(a+4)x^2+6x-1}{x+3} = 0$ имеет единственное решение?

Задача 8. При всех a решите уравнение $3^{\frac{ax+2}{x^2+2}} + 3^{\frac{3x^2-ax+4}{x^2+2}} = 12$.

Уравнения с параметром

Параметры и переменные. Задачи посложнее

Задача 1. Найдите все a , при которых множество решений неравенства

$$\frac{a + 2 - 2^{x-2}}{a + 3} \geq \frac{5a + 5}{2(2^x + 3a + 3)}$$

содержит какой-либо луч на прямой.

Задача 2. Найдите все значения b , при которых множество решений неравенства

$$\frac{x - 3b}{b - 2x} < 0$$

содержит отрезок $[-3; -1]$.

Задача 3. Найдите все значения a , при которых сумма длин интервалов, составляющих множество решений неравенства

$$\frac{x^2 + (2a^2 + 6)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2 + 7a - 7)x - a^2 + 2a - 3} < 0$$

не меньше 1.

Задача 4. Для каждого a решите неравенство $\frac{x^2 \cdot 2^{|2a-1|} - 2x + 1}{x^2 - (a-2)x - 2a} > 0$

Задача 5. Найдите наибольший корень уравнения

$$x^2 + (3ab + 3a - 2)x + 5ab + 5a = 17$$

при $a \geq 1$, $b \geq 0$.

Задача 6. При каких значениях параметра a уравнение

$$5x^4 + 7ax + 2a^2 = 0$$

имеет хотя бы один целый корень?

Задача 7. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$|x^2 + 4x - a| > 6$$

не имеет решений на отрезке $[-3; 0]$.

Задача 8. Найдите все x , удовлетворяющие неравенству

$$(2 - a)x^3 + (1 - 2a)x^2 - 6x + 5 + 4a - a^2 < 0$$

хотя бы при одном значении a , принадлежащем отрезку $[-1; 2]$.

Задача 9. Найдите наименьшее x , при котором существуют y, z , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1$$

.

Уравнения с параметром

Необходимые и достаточные условия

В задачах с параметрами нас обычно просят найти значения параметра, при которых будут выполнены какие-то условия для данных уравнений или неравенств. Иногда бывает полезно эти условия ослабить так, чтобы все равно найти некие значения параметра, а потом разобраться, какие из них на самом деле подходят под исходные условия.

Пример 1. Найдите множество пар чисел $(a; b)$, для каждой из которых равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1$$

справедливо при любых значениях x .

Решение: Если равенство должно выполняться для любого x , то подставим какой-нибудь удобный. Очевидно, самый удобный тут $x = 0$. Получаем

$$b^2 = \cos b^2 - 1.$$

Так как левая часть неотрицательная, а правая — неположительна, получаем, что $b = 0$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$a(\cos x - 1) = \cos ax - 1.$$

Снова подставим в это равенство удобное значение аргумента, например, $x = 2\pi$:

$$0 = \cos 2\pi a - 1$$

Откуда $a \in \mathbb{Z}$. Подставим еще и $x = \frac{\pi}{2}$:

$$-a = \cos \frac{a\pi}{2} - 1 \Leftrightarrow \cos \frac{a\pi}{2} = 1 - a$$

Это оставляет нам всего три возможных значения a : $a = 0, 1, 2$. Теперь осталось только подставить возможные пары $(a; b) \in \{(0; 0), (1; 0), (2; 0)\}$ в исходное уравнение и проверить, какие из них действительно подойдут. Несложно убедиться, что подойдут только первые две. ■

Задача 1. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2 \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

будет иметь решение для любого b .

Задача 2. Найдите все пары $(a; b)$, при которых равенство

$$\sin(ax + b) = a \sin x + b$$

выполнено для всех x .

Задача 3. Найдите все a , при которых неравенство

$$(b-1)x + 2\sqrt{1 - (b-1)^{-2}} < \left(\frac{a+1}{b-1} - b + 1 \right) \cdot \frac{1}{x}$$

выполнено для любых $b \geq 2$ и $x < 0$.

Задача 4. Найдите все значения a , при которых для любого b уравнение

$$|x - 2| + b|2x + 1| = a$$

имеет хотя бы один корень.

Задача 5. Найдите все значения a , при которых неравенство

$$x^2 + 2|x - a| \geq a^2$$

справедливо для всех x .

Уравнения с параметром

Контрольная

Задача 1. Найдите все a , при которых неравенство $\frac{x + 3a - 5}{x + a} \geq 0$ выполнено для всех $1 \leq x \leq 4$.

Задача 2. Найдите все a , при которых для любого b уравнение

$$\cos(b + ab + bx) + 2\cos(b^2x) = 3a^2$$

имеет хотя бы один корень.

Задача 3. При каких значениях a один из корней квадратного уравнения

$$(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0$$

больше 1, а другой – меньше 1?

Задача 4. При каких a уравнение $4^{\sin x} + a \cdot 2^{\sin x} + a^2 - 1 = 0$ не имеет корней?

Задача 5. Найдите все значения параметра p , при которых множество решений неравенства

$$(p - x^2)(p + x - 2)$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 1$.