Листок №51 Топология прямой 08.06.2020
30/24/18 з. на 5/4/3

Определение 1. *Окрестностью* точки называется произвольный содержащий её интервал (всюду в этом листке под интервалами понимаются в том числе и бесконечные: открытые лучи и вся прямая).
Пусть $Y \subseteq \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется
- *внутренней точкой* множества Y, если у неё найдётся окрестность, целиком содержащаяся в Y,
- *внешней точкой* множества Y, если у неё найдётся окрестность, не пересекающаяся с Y,
- *граничной точкой* множества Y, если она не является ни внутренней, ни внешней,
- *изолированной точкой* множества Y, если у неё найдётся окрестность, пересечение которой с Y состоит только из x.

Задача 1. Докажите, что если x — граничная точка множества Y, то
а) либо $x \notin Y$, либо в любой её окрестности бесконечно много точек, не принадлежащих Y;
б) либо $x \in Y$, либо в любой её окрестности бесконечно много точек, принадлежащих Y.
в) Выкинем из множества все его граничные точки. Может ли так оказаться, что мы ничего не выкинули? Выкинули всё?

Задача 2. Найдётся ли множество, у которого **а)** нет внутренних точек; **б)** ровно одна внутренняя точка? **в)** все точки внутренние?

Определение 2. Подмножество $U \subseteq \mathbb{R}$ называется *открытым,* если все его точки — внутренние. Подмножество $V \subseteq \mathbb{R}$ называется *замкнутым,* если оно содержит все свои граничные точки.

Задача 3. Найдите внутренние, внешние, граничные и изолированные точки для
а) интервала $(0, 1)$; **б)** отрезка $[0, 1]$; **в)** множества $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$;
г) множества всех рациональных точек на прямой;

Задача 4. Докажите, что **а)** интервал, дополнение к отрезку — открытые подмножества прямой;
б) отрезок, дополнение к интервалу — замкнутые подмножества прямой.

Задача 5. Верно ли, что открытое множество отрезка определяется рациональными числами, которые оно содержит?

Задача 6. Докажите, что множество граничных точек любого множества замкнуто.

Задача 7. Пусть $M \subset \mathbb{R}$ — непустое подмножество, и x — произвольная точка. Расстояние от x до M по определению равно $\inf\{|x - y| \colon y \in M\}$. Докажите, что если M — замкнуто, то в M всегда найдётся точка y такая, что $|x - y|$ равно расстоянию от x до M.

Задача 8°. **а)** Существуют ли множества, не являющиеся ни замкнутыми, ни открытыми?
б) Всегда ли дополнение замкнутого множества открыто? Всегда ли дополнение открытого множества замкнуто? (*Дополнением* множества A называется разность $\mathbb{R} \setminus A$. Обозначения: $\overline{A}$.)

Задача 9. **а)** Докажите, что конечное пересечение (то есть пересечение конечного числа) и произвольное объединение (то есть объединение произвольного количества) открытых множеств открыто.
б) Докажите, что конечное объединение и любое пересечение замкнутых множеств замкнуто.

Задача 10. Найдите все множества, являющиеся одновременно открытыми и замкнутыми.

Задача 11. Пусть f — непрерывная функция. Докажите, что множество $\{x \mid f(x) = 0\}$ замкнуто.

Задача 12. Опишите все подмножества прямой, не имеющие граничных точек.

Задача 13°. Докажите, что любое открытое подмножество множества $\mathbb{R}$ либо совпадает с $\mathbb{R}$, либо представляет собой объединение конечного или счетного множества непересекающихся интервалов и открытых лучей.

1 а	1 б	1 в	2 а	2 б	2 в	3 а	3 б	3 в	3 г	4 а	4 б	5	6	7	8 а	8 б	9 а	9 б	10	11	12	13

Определение 3. Непустое множество M называется *компактом*, если из произвольного покрытия M открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 14°. Докажите, что

а) компакты на прямой — это в точности непустые замкнутые ограниченные множества;

б) у любой последовательности вложенных компактов $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$ пересечение непусто.

Канторово множество и канторова лестница

Может показаться, что раз открытые множества — объединение интервалов, то замкнутые — объединения точек и отрезков. Увы, это не так, замкнутые множества могут быть достаточно противными.

Задача 15. (*Канторово множество*) Возьмём отрезок $K_0 = [0, 1]$. Разделим его на три равные части и средний интервал $I_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ выкинем. Первый и третий отрезки образуют множество K_1. Каждый из них разделим на три части и выкинем средние интервалы $I_1^2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $I_2^2 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Получится множество K_2. И так далее: на n-м шаге будем делить каждый из 2^{n-1} отрезков, образующих K_{n-1}, на три равные части и выкидывать все средние интервалы $I_1^n, I_2^n, \ldots, I_{2^{n-1}}^n$. Так получается множество K_n, состоящее из 2^n отрезков. Устремим n к бесконечности. Множество, получающееся в пределе, т. е. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, называется *канторовым* (всюду дальше будем обозначать его K).

а) Конечно ли это множество? Счётно?

б) Является ли оно открытым? Замкнутым?

Задача 16. Бесконечно ли множество рациональных чисел, принадлежащих канторову множеству?

Задача 17. **а)** Как выглядит запись точек из канторова множества в троичной системе счисления?

б) Докажите, что канторово множество имеет мощность континуума.

Задача 18. (*Канторова лестница*) В точках 0 и 1 значение функции $K(x)$ принимается равным соответственно 0 и 1. Далее интервал $(0, 1)$ разбивается на три равные части $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. На среднем отрезке полагаем $K(x) = \frac{1}{2}$. Оставшиеся два отрезка снова разбиваются на три равные части каждый, и на средних отрезках $K(x)$ полагается равной $\frac{1}{4}$ (на левом) и $\frac{3}{4}$ (на правом). Каждый из оставшихся отрезков снова делится на три части, и на внутренних отрезках $K(x)$ определяется как постоянная, равная среднему арифметическому между соседними, уже определенными значениями $K(x)$, и т.д. На остальных точках единичного отрезка определяется «по непрерывности» (так чтобы в итоге получилась непрерывная функция). Полученная функция называется *канторовой лестницей.*

Докажите, что вот это «определяется по непрерывности» работает: $K(x)$ однозначно определена в каждой точке отрезка $[0, 1]$, нестрого монотонна и непрерывна.

Задача 19. Будем наугад брать точку x из отрезка $[0, 1]$. С какой вероятностью найдётся такая окрестность точки x, в которой канторова лестница $K(x)$ постоянна?

14 а	14 б	15 а	15 б	16	17 а	17 б	18	19