

Тригонометрия

Формулы кратных аргументов

Задача 1. Пользуясь формулами сложения аргументов выведите формулы:

а) $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, $\operatorname{tg}(2\alpha)$; б) $\sin(3\alpha)$, $\cos(3\alpha)$, $\operatorname{tg}(3\alpha)$.

Задача 2. (Основная тригонометрическая подстановка) Выразите $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.
Укажите, при каких α верна каждая из формул.

Задача 3. Вычислите:

а) $\sin 2x$ и $\cos 2x$, если $\sin x = 0,96$;

б) $\operatorname{tg} 2x$, если $\cos x = -\frac{5}{13}$;

в) $\sin 3x$, если $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -2$;

г) $\operatorname{tg} 4x$, если $\operatorname{ctg} x = 2$.

Задача 4. Найдите $\operatorname{tg}(4x - y)$, если $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} y = \frac{1}{239}$.

Задача 5. Докажите, что $\sin 2x < 2 \sin x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Задача 6. Вычислите:

а) $8 \sin^2 \frac{15\pi}{16} \cdot \cos^2 \frac{17\pi}{16} - 1$;

в) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} + \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{8}$;

д) $\sin^2 \frac{\pi}{13} + \sin^2 \frac{11\pi}{26}$;

б) $\sin^4 \frac{23\pi}{12} - \cos^2 \frac{13\pi}{12}$;

г) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{8} + \operatorname{ctg} \frac{9\pi}{8}$;

е) $\cos^2 \frac{3\pi}{34} + \cos^2 \frac{7\pi}{17}$.

Задача 7. Найдите:

а) $\cos \frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

б) $\sin^4(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha)$, если $\cos(\pi - 4\alpha) = -\frac{1}{3}$.

Задача 8. Найдите значение выражения $\frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha}$, если известно, что $4 \sin^2 \alpha - 9 \cos \alpha - 6 = 0$.

Задача 9. Упростите выражение $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \beta}}$, если $2\pi \leq \beta \leq 4\pi$.

Задача 10. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражений:

а) $3 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha$;

б) $\sin^6 \beta + \cos^6 \beta$;

в) $\cos 2\gamma - |\cos \gamma|$.