Тригонометрия

Формулы суммы и разности

Теорема 1. *Следующие соотношения верны для всех α и β, если не указано иное:*

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\tfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\tfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},\ \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta},\ \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$$

Задача 1. Вычислите:

а) $\sin\dfrac{5\pi}{12}$; **б)** $\cos\dfrac{\pi}{12}$; **в)** $\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{6}$.

Задача 2. Вычислите:

а) $\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=-\dfrac{8}{17}$, $\sin\beta=\dfrac{20}{29}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$

б) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$, если $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$, $\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$, $\sin\gamma=\dfrac{7}{25}$, $0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$, $0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$

Задача 3. Упростите выражения:

а) $\sin(-\dfrac{47}{6}\pi)\cos(\dfrac{25}{4}\pi)-\sin(\dfrac{23}{6}\pi)\cos(\dfrac{49}{4}\pi)$;

б) $\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}+\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha}+\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

в) $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+x)-\cos(\frac{\pi}{4}+x)}{\sin(\frac{\pi}{4}+x)+\cos(\frac{\pi}{4}+x)}$

г) $\cos(\alpha-\beta)(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-1)+\cos(\alpha+\beta)(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$

д) $\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta-\dfrac{\cos^2(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)}{2\sin^2\alpha\sin^2\beta}$

Задача 4. При каких значениях a и b возможно равенство $\sin a+\sin b=\sin(a+b)$?

Задача 5. Докажите, что:

а) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1$, если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$

б) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$