

Тригонометрия

Повторение

Определение 1. Множество корней многочлена второй степени от двух переменных называется (плоской) квадрикой.

ТЕОРЕМА 1. *Всякая квадрика на плоскости является либо параболой, либо гиперболой, либо эллипсом, либо объединением двух прямых (параллельных, пересекающихся или совпадающих), либо точкой, либо пустым множеством.*

Задача 1. Задайте уравнениями от двух переменных множества:

- а) Окружность с центром $(-3; 1)$ и радиусом 2;
- б) Какую-нибудь гиперболу, проходящую через точку $(5; 4)$;
- в) Объединение прямых $y = -x$ и $y = 4$;
- г) Объединение двух параллельных прямых;
- д) Точку $(0; 0)$;

Задача 2. Изобразите множество точек, удовлетворяющих соотношению:

- а) $x^2 + y^2 + 4x + 4y = 17$
- б) $\frac{x^2}{4} - x - y = 0$
- в) $x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$
- г) $2x^2 - 3xy + y + 1 = 0$
- д) $2xy - x - y + 4 = 0$

Задача 3*. Докажите теорему 1.

Задача 4. Укажите все числа, принадлежащие данному промежутку и изображаемые той же точкой тригонометрической окружности, что и данное число:

- а) $\frac{\pi}{2}; [-\frac{3\pi}{2}; 0]$
- б) $\frac{4}{\pi}; (-\pi; \pi]$
- в) $\frac{279\pi}{4}; [-\frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{2}]$
- г) $\sqrt{7} - \sqrt{2}; (\sqrt{3}; 12)$

Определение 2. Координаты $(x; y)$ точки на числовой окружности, соответствующей числу α называются косинусом и синусом этого числа соответственно.

Определение 3. Тангенсом числа α называется отношение его синуса к косинусу $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Котангенсом называется обратная к тангенсу функция.

Задача 5. Изобразите график котангенса на отрезке $[-3\pi; 5\pi]$.

Задача 6. Найдите $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если: а) $\cos \alpha = \frac{24}{25}; \alpha \in [\pi; 2\pi]$; б) $\operatorname{ctg} \alpha = -3; \alpha \in (-\frac{3\pi}{2}; -\pi)$.

Задача 7. Постройте график синусоиды, чтобы выполнялись условия:

- а) точка $(1; 1)$ принадлежала графику;
- б) амплитуда колебаний была равна 3 и точка $(\sqrt{2}; \frac{1}{2})$ принадлежала графику;
- в) график пересекал прямую $y = \frac{1}{3}x$ ровно два раза;

Задача 8. Решите уравнения:

- а) $\cos^4 4x = 4$
- б) $\sin \frac{x}{2} \cdot \operatorname{ctg} x^3 = 0$
- в) $\cos(4 - \frac{1}{3}x) \cdot \sqrt{\operatorname{tg}(2x)} = 0$
- г) $2\sqrt{1 - \cos^2 x} = 3 - \sin x$
- д) $\cos^3 \frac{2x}{3} + \cos^2 \frac{2x}{3} - 2 \cos \frac{2x}{3} = 0$

Задача 9. Найдите области определения функций:

- а) $\sqrt{-\cos x}$
- б) $\sqrt{-\sin x - \sqrt{1 - \cos^2 x}}$
- в) $\sqrt{\operatorname{ctg} x} \sqrt{\operatorname{tg} x}$
- г) $\sqrt{\cos(x \cdot \sqrt{4 + 3x - x^2})}$
- д) $\sqrt{\cos(\pi x) \sqrt{4 - x^2}}$
- е) $\sqrt{\sin(\pi x) \sqrt{3 + 5x - 2x^2}}$
- ж) $\sqrt{\frac{\sin x}{\sqrt{4 + 11x - 3x^3}}}$
- з) $\frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{1 - \sin x - \cos x^2}$