

Приближенные вычисления.

В этом листочке можно пользоваться калькулятором!

Для числа a и его приближения a' определим:

Определение 1. Любое число h , такого что $h \geq |a - a'|$ называется **погрешностью приближения** (или оценкой погрешности приближения).

Определение 2. **Абсолютной погрешностью** приближения называется разность между числом и его приближением: $\Delta_a := |a - a'|$.

Определение 3. **Относительной погрешностью** приближенного равенства $a \approx a'$ называют отношение абсолютной погрешности к величине числа: $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$.

Кроме того, относительную погрешность можно определять как отношение абсолютной погрешности к величине приближения числа: $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a'|}$

Задача 1. Можно ли считать равенство $3 = 3$ приближенным равенством?

Задача 2. Для приближенных значений числа $\frac{3}{7}$ укажите абсолютную и относительную погрешности:

а) 0,4; б) 0,6; в) 0,42.

Задача 3. Найдите приближения чисел 1372,05; 0,000137; -17,0008 с точностью

а) до одной цифры после запятой; б) до трех цифр после запятой.

Задача 4. Округлите числа $a = 23807113$, $b = 10,006348$, $c = 0,00238072113$ с относительной погрешностью не более а) 0,001 б) $\frac{1}{2} \cdot 0,001$.

ТЕОРЕМА 1. Абсолютная погрешность суммы или разности приближений нескольких чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей приближений этих чисел.

ТЕОРЕМА 2. Относительная погрешность произведения или частного двух приближений чисел a и b не превышает суммы относительных погрешностей приближения этих чисел.

Задача 5. Оцените точность приближенного равенства:

а) $123784,5 + 3897 \approx 124000 + 4000 = 128000$

б) $0,784 + 0,385 \approx 0,7 + 0,3 = 1$

в) $2,58302 + 700284 \approx 2,583 + 7,002 = 9,585$

г) $0,5872 + 0,3895 \approx 0,59 + 0,39 = 0,98$

Задача 6. Округлите числа 0,378561 и 4,251617 так, чтобы вычислить их сумму с точностью до 0,1.

Задача 7. Вычислите:

а) $0,12345678 \cdot 2, (7)$ с относительной погрешностью меньшей, 0,001

б) $\pi \cdot 1567,23$ с относительной погрешностью меньшей, $\frac{1}{500}$

в) $4, (567) : 31,5(32)$ с относительной погрешностью меньшей, 0,001

г) $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ с относительной погрешностью меньшей, $\frac{1}{500}$

Определение 4. **Значащими цифрами** называются:

- Все ненулевые цифры числа;
- Нулевые цифры, стоящие между ненулевыми;
- Нули, являющиеся представителями сохраненных десятичных разрядов при округлении.

Задача 8. а) Пусть вам известны две значащие цифры приближения числа a , где $0 < a < 1$. Каковы могут быть абсолютная и относительная погрешности этого приближения? б) А если значащих цифр было три? в) Если значащих цифр две, но $1 < a < 10$? г) Значащих цифр две и число $10 < a < 100$.

Задача 9. Пусть $a \approx 35,1$, $b \approx 0,871$; $a \cdot b \approx 35,1 \cdot 0,871 = 30,5721 \approx 30,57$. Найдите относительную погрешность вычислений. Подумайте, насколько осмысленны цифры в разрядах десятых и сотых.

Задача 10. Вычислите, округлив ответ до подходящего числа значащих цифр:

а) $4,735 : 0,5 \cdot 29,4 \cdot 0,999$

б) $3,006 - 0,3417 : 34 - 0,875 : 125$

в) $(0,008 + 0,992) \cdot (5,0 \cdot 0,6 - 1,4)$

г) $(50000 - 1397,3) : (20,4 + 33,603)$

д)
$$\frac{4,06 \cdot 0,0058 + 3,3044895 - (0,7584 : 2,37 + 0,0003 : 8)}{0,03625 \cdot 80 - 2,43}$$

е) в пунктах а), б), в) вычислите абсолютную и относительную погрешности. Подумайте, насколько значащими на самом деле являются значащие цифры ответа.