

Функциональные уравнения.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется монотонно возрастающей, если для любых $a, b \in D(f)$, таких что $a < b$ выполнено $f(a) \leq f(b)$. Аналогично определяется монотонно убывающая функция. Если при тех же условиях выполнено строгое неравенство $f(a) < f(b)$, то говорят, что функция возрастает строго монотонно.

Определение 2. Функцию называют (строго) монотонной, если она (строго) монотонно возрастает или убывает.

ТЕОРЕМА 1. У строго монотонной функции не может быть более одного нуля.

Задача 1. Может ли у строго возрастающей функции не быть нулей?

Задача 2. Решите уравнения:

- а) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = 6$
- б) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3} = 5$
- в) $\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x} + \sqrt{2x+11} = 3$
- г) $(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})(\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1}) = 16$
- д) $(\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$
- е) $(2x+1)(2 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3}) + 3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) = 0$
- ж) $2x + 1 + x\sqrt{x^2 + 2} + (x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 0$

ТЕОРЕМА 2. Если функция $f(x)$ строго монотонно возрастает, то уравнения $f(x) = x$ и $f(f \dots (f(x) \dots)) = x$ равносильны в этой области.

Задача 3. Решите уравнения:

- а) $x^3 - 24 = \sqrt[3]{24 + x}$
- б) $(x^3 + x)^3 + x^3 = 0$
- в) $2^{2^{2x}-1} = x$
- г) $2\sqrt{2x-3} = x+3$
- д) $x^4(x-1)\sqrt{x^2\sqrt{x-1}-1} = x$

ТЕОРЕМА 3. Если функция $f(x)$ строго монотонно возрастает на области допустимых значений, то уравнения $f(g(x)) = f(h(x))$ и $g(x) = h(x)$ равносильны.

Задача 4. Решите уравнения:

- а) $|2x-1|^3 + |2x-1| = |x+2|^3 + |x+2|$
- б) $(x^2 - 2x + 3)^2 \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 3}{x-5}} = (x-5)^2$
- в) $(3x-1)\sqrt{6-6x} = (2-x^2)\sqrt{2x^2}$
- г) $3^{|x-\sqrt{x}|} - 3^{|x-2|} = 2^{x-\sqrt{x}} - 2^{x-2}$
- д) $\operatorname{tg}\left(\sqrt{(1-x)(x+\frac{2}{3})}\right) - \operatorname{tg}(2x) = 0$

Задача 5. При каких a уравнение $\sin^{14} x + (a - 3 \sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3 \sin x$ имеет хотя бы одно решение?