Задачи ВОШ

Окружной этап, 1992-1994гг

Задача 1. (*9 класс*) Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a + b - 1)$$

Задача 2. (*9 класс*) Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$ не имеет решений в целых числах.

Задача 3. (*9 класс*) Известно, что уравнение $ax^5 + bx^4 + c = 0$ имеет три различных действительных корня. Докажите, что уравнение $cx^5 + bx^4 + a = 0$ также имеет три различных действительных корня.

Задача 4. (*10 класс*) Решите в положительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{x_2} = 4 \\ x_2 + \dfrac{1}{x_3} = 1 \\ x_3 + \dfrac{1}{x_4} = 4 \\ \ldots \\ x_{99} + \dfrac{1}{x_{100}} = 4 \\ x_{100} + \dfrac{1}{x_1} = 1 \end{cases}$$

Задача 5. (*10 класс*) Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет два различных действительных корня. Докажите, что уравнение $x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - ax + 1 = 0$ имеет четыре различных действительных корня.

Задача 6. (*11 класс*) На доске написано: $x^3 + \ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0$. Два школьника по очереди вписывают вместо многоточия действительные числа. Цель первого — получить уравнение, имеющее ровно один действительный корень. Сможет ли второй ему помешать?