Рациональная степень.

Определение 1. Пусть даны числа $a > 0$ и $q = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Рациональной степенью q числа a называется число $b = a^q$, такое что $b > 0$ и $b^n = a^m$.

При всех $a, b > 0$, $p, q \in \mathbb{Q}$ выполнены следующие свойства:

- $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$
- $a^{p-q} = \dfrac{a^p}{a^q}$
- $(ab)^p = a^p \cdot b^p$
- $(a^p)^q = a^{pq}$
- Если $p > q$, то $a^p > a^q$ при $a > 1$ и $a^p < a^q$ при $a < 1$

Задача 1. Докажите свойства степени.

Задача 2. Объясните, зачем в определении условие $a > 0$. Если возможно, дайте более общее определение (т. е. работающее для большего множества чисел a и q).

Задача 3. Докажите, что $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$

Задача 4. Сравните числа:

а) $0,8^{0,4}$ и $0,8^{0,5}$ **б)** $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{4,3}$ и $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{4,4}$ **в)** $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ и $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$ **г)** $0,02^{-3,2}$ и $0,02^{-3,3}$ **д)** $\pi^{-\frac{1}{2}}$ и $\pi^{-\frac{1}{3}}$

Задача 5. Решите уравнения:

а) $2^x = 512$
б) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 81$
в) $(\sqrt{5})^x = \dfrac{1}{125}$
г) $4^{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$
д) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-3} = \frac{81}{16}$
е) $(\sqrt{27})^x = 0,(3)$
ж) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3$

Задача 6. Решите неравенства:

а) $3^x > 243$
б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leqslant 4$
в) $(0,25)^x > 2\sqrt{2}$
г) $3^x \geqslant -\frac{1}{3}$
д) $6^{\frac{x-1}{x+1}} < \frac{1}{36}$
е) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$
ж) $-1 < (\sqrt{2})^x < 1$

Задача 7. Решите уравнения:

а) $3^{x-2} + 2 \cdot 3^{x-1} + 3^x = 16$
б) $5^{x-1} - 3 \cdot 5^x + 5^{x+1} = 11$
в) $4^x - 8 \cdot 2^{x-1} - 32 = 0$
г) $7^x \cdot (\sqrt{2})^{2x^2-6} - \left(\frac{7}{4}\right)^x = 0$
д) $5^{x-1} + 5 \cdot 0,2^{x-2} = 26$
е) $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$
ж) $5^{1+x^3} - 5^{1-x^3} = 24$
з) $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$
и) $12^x + 6^x - 2 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^x - 2^{x+1} + 4 = 0$