

Замена переменной. Возвратные уравнения

Задача 1. В шахматном турнире участвовали учащиеся 10го класса и два ученика 9го класса. Каждый участник сыграл с каждым по одной партии, получая за выигрыш 2 очка, за ничью — 1 очко, и 0 очков за проигрыш. Два девятиклассника набрали вместе 7 очков, а все десятиклассники набрали одинаковое количество очков. Сколько десятиклассников участвовало в турнире?

Задача 2. Решите уравнения:

а) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 3)(x - 2) - 1 = 0$

б) $(x - 2)(x - 3)^2(x - 4) = 20$

в) $x(x + 4)(x + 5)(x + 9) + 96 = 0$

г) $(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6) = 1680$

д) $x^4 + x^2 + 4|x^2 - x| = 2x^3 + 12$

е) $x^4 + 4x^3 = 30 - 7|x^2 + 2x| - 4x^2$

Задача 3. Пусть $a + \frac{1}{a} = 3$. Найдите:

а) $\frac{a^4 + 1}{2a^2}$

б) $a^3 + \frac{1}{a^3}$

Задача 4. Решите возвратные уравнения:

а) $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$

б) $\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) - \left(x + \frac{4}{x}\right) - 12 = 0$

в) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$

г) $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 + 7x + 6 = 0$

д) $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$

е) $(x + 5)^4 - 13x^2(x + 5)^2 + 36x^4 = 0$

ж) $3(x + 2)^2 + 2(x^2 - 2x + 4)^2 = 5(x^3 + 8)$

Задача 5. Решите уравнения, выполнив подходящую замену переменной:

а) $x^2 + \frac{x^2}{(x + 1)^2} = 3$

б) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$

в) $\frac{x^2}{1 - 2x^2} = 12x^2 + 7x - 6$

г) $\frac{24x}{2x^2 - 3x + 4} = \frac{12x}{x^2 + x + 2} + 5$

д) $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2$

е) $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 7x + 4} + \frac{x^2 - x + 4}{x^2 + x + 4} + \frac{13}{3} = 0$