Многочлены. Повторение.

Теорема Виета и рациональные корни многочленов

Теорема Виета — важнейшее соотношение между корнями и коэффициентами многочлена. Для любого многочлена верна

Теорема 1. (Виета) *Если x_1, x_2 — корни приведенного многочлена x^2+bx+c, то $b=-x_1-x_2$, $c=x_1x_2$*

Во время решения уравнений мы пользуемся обратной теоремой:

Теорема 2. *Если для чисел x_1, x_2 и приведенного квадратного уравнения x^2+bx+c верны соотношения $b=-x_1-x_2$, $c=x_1x_2$, то x_1, x_2 — корни этого многочлена.*

Задача 1. Известно, что $a-b+c=8$ и $a^2+b^2+c^2=110$. Найдите $ac-ab-bc$.

Задача 2. Пусть $x_1,\ x_2$ — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Выразите через p и q следующие величины: **а)** $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ **б)** $\dfrac{1}{(x_1+p)^2}+\dfrac{1}{(x_2+p)^2}$

Задача 3. Постройте кубический многочлен, корни которого являются квадратами корней многочлена $x^3+x^2-2x-1=0$.

Задача 4. При каких значениях параметра a оба корня $(1+a)x^2-3ax+4a=0$ уравнения больше единицы?

Задача 5. При каких значениях параметра a уравнение $x^2-(a+1)\cdot|x|+a=0$ имеет три решения?

Задача 6*. Укажите все точки плоскости $(x;y)$, через которые не проходит ни одна из кривых семейства $y=p^2+(4-2p)x-x^2$.

Теорема 3. (О рациональных корнях многочлена) *Если несократимая дробь $\dfrac{p}{q}$ — корень многочлена $a_nx^n+\ldots+a_0$, то $q|a_n$ и $p|a_0$.*

Задача 7. Докажите при помощи предыдущей теоремы, что $\sqrt{17}$ — иррациональное число.

Задача 8. Разделите с остатком $x^4-4x^3+6x^2-3x+1$ на x^2-x+1.

Задача 9. Найдите рациональные корни многочлена $2x^5+2x^4-12x^3-28x^2-22x-6$.

Задача 10. Решите уравнения (от одной переменной x и с параметром a)
а) $x^4+x^3-3a^2x^2-2a^2x+2a^4=0$ **б)** $x^3-3x=a^3-a^{-3}$

Задача 11*. **а)** Проверьте, что многочлен от двух переменных $P(x,y)$ можно поделить в столбик на многочлен $x+y$. Объясните, как делить многочлен $P(x,y)$ на $x+y$ с остатком.
б) Прокачайте теорему Безу: докажите, что многочлен от двух переменных $P(x,y)$ делится на $x+y$, если из равенства $x+y=0$ следует $P(x,y)=0$.
в) Докажите, что при нечетном m выражение

$$(x+y+z)^m-x^m-y^m-z^m$$

делится на

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$$

Задача 12. При каких k выражение $x^3+y^3+x^3+kxyz$ делится на $x+y+z$?