Многочлены. Повторение.

Разложение на множители

Методов раскладывать многочлен на множители всего три. Самый главный – группировка слагаемых. Кроме того, помогает знание формул сокращенного умножения и вынесение полного квадрата в сочетании с формулой разности квадратов. После того, как разложение на множители проведено успешно, мы пользуемся следующей

Теорема 1. *Множество нулей произведения нескольких многочленов совпадает с объединением множеств нулей всех сомножителей.*

Задача 1. Решите уравнения без использования формулы дискриминанта и теоремы Безу:

а) $(13x-19)^2=(19x-13)^2$

б) $(x-8)(8x-1)=(1-8x)^2$

в) $x^3+3x^2-4x-12=0$

г) $b^2+ab-2a^2-b+a=0$

Задача 2. Разложите на неприводимые множители:

а) x^4+x^3+2x-4

б) $-x^4+x^3+6x+36$

в) $(x-2)^3+(x+2)^3-2(x-3)(x^2+3x+9)$

г) n^4-12n^2+16

д) p^4+324

е) $a(a+2)+b(b+2)-2(a+1)(b+1)+2$

ж) $(a+b)(a+b+2)+(a-b)(a-b+2)+2(a+b+1)(a-b+1)-2$

з) $y^8-y^6-4y^2-16$

Задача 3. Найдите наименьшее значение выражения $(2a-1)(2a+1)+3b(3b-4a)$.

Задача 4. Докажите, что для любых действительных чисел x, y, z из равенства $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ следует равенство $x=y=z$.

Задача 5. Решите в целых числах уравнения (или докажите, что решений нет):

а) $3x^2=16y^2+8y+5$ **б)** $2x^2-2xy+9x+y=2$ **в)** $xy^2-7(x+y^2)=1$

Многочлены. Повторение.
Метод неопределенных коэффициентов

Чтобы раскладывать многочлены на множители, не обязательно видеть какие-то группы слагаемых. Можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Для этого сначала нужно угадать, какие одночлены должны быть в каждом из сомножителей (например, квадратный трехчлен может разложиться только в произведение двух линейных), а затем записать предполагаемое разложение с неизвестными (неопределенными) коэффициентами. Так как после раскрытия скобок должно получиться выражение, тождественно равное исходному. Равенство коэффициентов при соответствующих одночленах дает систему уравнений, из которой можно найти коэффициенты, а, тем самым, и разложение на множители. Важно помнить, что есть много способов упростить вычисления: например, дополнительные соотношения на коэффициенты можно получить, подставляя конкретные значения переменных.

Задача 1. Разложите на множители с действительными коэффициентами многочлены:

а) x^4+4

б) $2x^3+x^2+x-1$

в) $x^{10}+x^5+1$

г) $a^3+b^3+c^3-3abc$

д) $x^3+3xy+y^3-1$

е) $x^2y^2-x^2+4xy-y^2+1$

ж) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

з) $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$

Задача 2. Можно ли разложить на множители с целыми коэффициентами многочлен $x^4+x^3+x^2+x+12$?

Задача 3. Упростите выражение: $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$

Задача 4. Пусть a, b, c — попарно различные числа. Докажите, что выражение $a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$ не равно нулю.

Задача 5*. Докажите, что многочлен x^4+px^2+q всегда можно разложить в произведение двух многочленов второй степени.

Подсказка: Поможет замена $t=x+\frac{\sqrt{q}}{x}$