Обозначение. Множества всех многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ обозначают соответственно $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$.

Определение 1. Пусть A и B — многочлены, причем $\deg B > 0$. Разделить A на B с остатком значит найти такие многочлены Q (частное) и R (остаток), что $A = BQ + R$, где либо $R = 0$, либо $\deg R < \deg B$.

Задача 1✎. Разделите с остатком $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$.

Задача 2. Докажите, что деление с остатком всегда возможно, и частное и остаток определены однозначно.

Задача 3✎. (*Теорема Безу*) Докажите, что остаток от деления $A(x)$ на двучлен $x - s$ равен числу $A(s)$.

Задача 4✎. **а)** Остаток от деления $A(x)$ на $x-1$ равен 5, а на $x-3$ равен 7. Найдите остаток от деления $A(x)$ на $(x-1)(x-3)$. **б)** Найдите остаток от деления x^{1000} на $x^2 + x - 1$.

Определение 2. Многочлен со старшим коэффициентом 1 называется *приведённым.*

Определение 3. *Наибольшим общим делителем* многочленов A и B из $\mathbb{R}(x)$ (из $\mathbb{Q}[x]$), хотя бы один из которых ненулевой, назовём (и обозначим НОД(A, B) или (A, B)) приведённый многочлен из $\mathbb{R}(x)$ (из $\mathbb{Q}[x]$), который 1) делит и A, и B (то есть, является общим делителем A и B); 2) делится на любой общий делитель A и B. Многочлены называются взаимно простыми, если их НОД равен 1.

Замечание. Из определения 3 не вполне ясно, почему НОД вообще существует. Задачи 6 и 7 проясняют этот вопрос.

Задача 5. Однозначно ли определяется НОД двух многочленов?

Задача 6. **а)** Пусть A, B, C — многочлены. Докажите, что множество общих делителей у пары A и B такое же, как и у пары A и $B - A \cdot C$, и если НОД есть у одной пары, то он есть и у другой, и эти НОДы равны. **б)** Сформулируйте и докажите алгоритм Евклида вычисления НОД многочленов.

Задача 7°. Докажите, что НОД(A, B) — приведенный многочлен наибольшей степени, делящий и A, и B.

Задача 8✎. Найдите НОД многочленов: **а)** $x(x-1)^3(x+2)$ и $(x-1)^2(x+2)^2(x+5)$;
б) $3x^3 - 2x^2 + x + 2$ и $x^2 - x + 1$; **в)*** $x^m - 1$ и $x^n - 1$; **г)*** $x^m + 1$ и $x^n + 1$.

Задача 9✎. Пусть A и B — любые многочлены степени m и n соответственно. Докажите, что
а) существуют такие многочлены U и V, что НОД$(A, B) = AU + BV$;
б) если $m,\ n > 0$, то U и V можно выбрать так, чтобы $\deg U < n$ (или $U = 0$) и $\deg V < m$ (или $V = 0$).
в) Найдите такие U и V, если A и B — многочлены из пункта б) предыдущей задачи.

Определение 4. Многочлен положительной степени из $\mathbb{R}[x]$ (из $\mathbb{Q}[x]$) называется *неприводимым над* $\mathbb{R}$ *(над* $\mathbb{Q}$*),* если он не представляется в виде произведения двух многочленов меньшей степени из $\mathbb{R}[x]$ (из $\mathbb{Q}[x]$).

Задача 10. Докажите, что многочлен степени 2 или 3, не имеющий корней в $\mathbb{Q}$, неприводим над $\mathbb{Q}$.

Задача 11. Может ли неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен из $\mathbb{Q}[x]$ не быть неприводимым над $\mathbb{R}$?

Задача 12✎. Разложите на неприводимые множители над $\mathbb{R}$ и на неприводимые множители над $\mathbb{Q}$:
а) $5x + 7$; **б)** $x^2 - 2$; **в)** $x^3 + x^2 + x + 1$; **г)** $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; **д)** $x^3 + 3$; **е)** $x^4 + 4$.

Задача 13✎. Докажите, что неприводимый над $\mathbb{R}$ многочлен из $\mathbb{R}[x]$, делящий произведение двух многочленов из $\mathbb{R}[x]$, делит один из этих многочленов. (*Указание:* используйте задачу 9а) для взаимно простых многочленов.)

Задача 14°. **а)** Докажите, что любой многочлен из $\mathbb{R}[x]$ ненулевой степени однозначно (с точностью до множителей из $\mathbb{R}$) раскладывается в произведение неприводимых над $\mathbb{R}$ многочленов из $\mathbb{R}[x]$.
б) Верно ли аналогичное утверждение для многочленов из $\mathbb{Q}[x]$?

Задача 15. **а)** Докажите, что у двух взаимно простых многочленов нет общих корней. **б)** Верно ли обратное?

Задача 16. Пусть $a \in \mathbb{R}$ — общий корень многочленов S и T из $\mathbb{Q}[x]$, причём T неприводим над $\mathbb{Q}$. Докажите, что S делится на T, и частное — многочлен с рациональными коэффициентами.

Задача 17. Делится ли **а)** многочлен $x^{100} - 32x^{90} + x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 10x + 2$ на многочлен $x^2 - 2$?
б) многочлен $x^{11} + x^9 - 5x^8 + x^7 - 6x^6 - 7x^4 - 98x^2 - 49$ на многочлен $x^3 - 7$?

Задача 18. Пусть α – корень многочлена с рациональными коэффициентами. Докажите, что существует многочлен $P \in \mathbb{Q}[x]$, который делит все такие $Q \in \mathbb{Q}[x]$, что $Q(\alpha) = 0$.

Задача 19*. **а)** Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ — корень некоторого ненулевого многочлена из $\mathbb{Q}[x]$. Пусть $G(x)$ — произвольный многочлен из $\mathbb{Q}[x]$, такой что $G(\alpha) \neq 0$. Докажите, что существует такой многочлен $H(x) \in \mathbb{Q}[x]$, что $\frac{1}{G(\alpha)} = H(\alpha)$. **б)** Найдите такой многочлен $H(x)$, если $\alpha = \sqrt[3]{2}$ и $G(x) = x + 1$.

1	2	3	4 а	4 б	5	6 а	6 б	7	8 а	8 б	8 в	8 г	9 а	9 б	9 в	10	11	12 а	12 б	12 в	12 г	12 д	12 е	13	14 а	14 б	15 а	15 б	16	17 а	17 б	18	19 а	19 б