Листок №24 | **Логика** | 10.10 – 24.10/2018
28/23/18 з. на 5/4/3

Задача 1. Расставьте вместо многоточий слова «необходимо», «достаточно», и там, где это возможно, «необходимо и достаточно» так, чтобы получились верные утверждения.

а) Чтобы число x делилось на 5, …………, чтобы его десятичная запись кончалась цифрой 0.

б) Чтобы число x делилось на 9, …………, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 3.

в) Чтобы параллелограмм был ромбом, …………, чтобы его диагонали делили пополам внутренние углы.

г) Чтобы параллелограмм был квадратом, …………, чтобы его стороны были равны.

Определение 1. Пусть A и B — некоторые утверждения. Определим следующие утверждения:
«не A» (обозначение $\overline{A}$) — *отрицание* A, истинно если и только если A ложно;
«A и B» (обозначение $A \wedge B$) — *конъюнкция* A и B, истинно если и только если и A, и B истинны;
«A или B» ($A \vee B$) — *дизъюнкция* A и B, истинно если и только если хотя бы одно из A и B истинно;
«если A, то B» (обозначение $A \Rightarrow B$), истинно если и только если A ложно или и A, и B истинны.
Говорят, что A и B *равносильны* ($A \Leftrightarrow B$), если A истинно тогда и только тогда, когда истинно B.

Задача 2. Докажите, что утверждения «из P_1 следует P_2» и «из $\overline{P_2}$ следует $\overline{P_1}$» равносильны.

Задача 3. Равносильны ли утверждения «кто не с нами, тот против нас» и «кто не против нас, тот с нами»?

Задача 4. Докажите такие теоремы (правила де Моргана): **а)** $\overline{P_1 \wedge P_2} \Leftrightarrow \overline{P_1} \vee \overline{P_2}$; **б)** $\overline{P_1 \vee P_2} \Leftrightarrow \overline{P_1} \wedge \overline{P_2}$.

Задача 5. Однажды принцесса сказала: «Хочу, чтобы мой муж был красивый, не был глупым или некрасивым, или чтобы был некрасивым, но не был глупым». Упростите это утверждение.

Задача 6. Рассмотрим утверждения вида «для любого $h \in H$ верно Q» (обозначается $\forall\ h \in H : Q$) и «существует $h \in H$ такой, что верно Q» (обозначается $\exists\ h \in H : Q$). Постройте отрицания к этим утверждениям.

Задача 7. Постройте отрицания к следующим утверждениям:

а) В каждом классе найдется ученик, который решил хотя бы одну задачу из контрольной.

б) Найдется класс, в котором каждый ученик решил хотя бы одну задачу из контрольной.

в) Существует такая задача, что в каждом классе хотя бы один ученик ее решил.

г) Для каждой задачи есть класс, в котором все ученики ее решили.

д) Есть город, в каждом районе которого есть улица, на которой в каждом доме есть однокомнатная квартира.

е) В каждом городе есть магазин, в котором нет хлеба, и никто из продавцов не знает, когда он будет.

Задача 8. Десять логиков пришли в кафе. Каждый заранее решил заказать себе кофе или чай, но ни один не знал планов остальных. Официантка громко спросила: «ВСЕМ принести кофе?», — а затем обошла логиков по одному, записывая ответы. Каждый громко и правдиво ответил на её вопрос «Не знаю», «Да» или «Нет».
а) Пусть первые 9 логиков ответили «Не знаю», а 10-й сказал «Да». Сколько логиков решили заказать себе кофе? **б)** Пусть 6-й и 7-й ответы были разными. Сколько каких ответов было? Найдите наименьшее число логиков, наверняка заказавших себе кофе и наименьшее число логиков, наверняка заказавших себе чай.

Задача 9. Назовём контрольную лёгкой, если за каждой партой найдётся ученик, решивший не менее 90% задач. Дайте определение трудной (т. е. не являющейся лёгкой) контрольной, не используя частицы «не».

Задача 10. Формализуйте фразу «ученики должны показывать свои тетради учителям», рассматривая множества учеников, тетрадок и учителей. Придумайте несколько вариантов, как это можно сделать.

Задача 11. Выразите **а)** $A \to B$; **б)** $A \wedge B$ через A и B, используя только дизъюнкцию и отрицание.

Задача 12. Выразите **а)** $\overline{A \to B}$; **б)** $A \vee B$ через A и B, используя только конъюнкцию и отрицание.

Задача 13*. Докажите, что высказывание, истинность которого зависит только от истинности высказываний $A_1, \ldots, A_n$, выражается через них с помощью только дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Задача 14*. На острове рыцарей и лжецов некоторые жители знакомы между собой (знакомство взаимно). Турист встретил 10 аборигенов. Каждый абориген сказал про каждого из остальных 9 аборигенов одну из фраз: «Я его не знаю», «Это мой знакомый рыцарь», «Это мой знакомый лжец». Любые двое сказали друг про друга разные фразы. Про какое наибольшее число аборигенов турист может гарантированно узнать, кто они?

Задача 15. Солдату-цирюльнику пришел приказ: брить тех солдат его взвода, которые не бреются сами (а остальных не брить). Сможет ли он его выполнить?

Задача 16. Являются ли следующие утверждения истинными или ложными (и вообще, утверждения ли это)?

Утверждение в рамке ложно

Утверждение в двойной рамке истинно

Задача 17. (*Истинное происшествие*) Н.Н.Константинов сказал своим кружковцам: «В январе кружок проходит 13, 17, 20, 24, 27 и 31 числа. В один из этих дней вам будет дана контрольная работа, но в какой именно день, вы накануне знать ещё не будете». Докажите, что эта контрольная не могла быть дана **а)** 31 января; **б)** 27 января; **в)** 20 января. **г)*** Но 20 января контрольная состоялась (единственную её задачу вы сейчас читаете), и накануне ни один кружковец об этом не знал. Как это совместить с решением пунктов а) – в)?

1 а	1 б	1 в	1 г	2	3	4 а	4 б	5	6	7 а	7 б	7 в	7 г	7 д	7 е	8 а	8 б	9	10	11 а	11 б	12 а	12 б	13	14	15	16	17 а	17 б	17 в	17 г