179 школа, 7Б.
Листок №13

Целые числа: остатки

24.01 – 07.02/2018
27/22/17 з. на 5/4/3

Определение 1. Пусть a и m — целые числа, $m \neq 0$. *Разделить a на m с остатком* значит найти такие целые числа k (*частное*) и r (*остаток*), что $a = km + r$ и $0 \leqslant r < |m|$.

Задача 1. Числа a и b — целые, $b > 0$. Отметим на числовой прямой все числа, кратные b. Они разобьют прямую на отрезки длины b. Точка a лежит на одном из них. Пусть kb — левый конец этого отрезка. Докажите, что k — частное, а $r = a - kb$ — остаток от деления a на b.

Задача 2. Найдите частные и остатки от деления 2018 на 23, -17 на 4 и $n^2 - n + 1$ на n при каждом n.

Определение 2. Говорят, что *a сравнимо с b по модулю m*, если $a - b \,\vdots\, m$. Обозначение: $a \equiv b \pmod{m}$. (Например, $29 \equiv -1 \pmod{6}$, $9N \equiv 2N \pmod{7}$ при натуральном N, и т.п.)

Задача 3. Докажите, что $a \equiv b \pmod{m}$ если и только если у a и b одинаковые остатки от деления на m.

Задача 4. Могут ли среди m последовательных целых чисел какие-то два иметь равные остатки от деления на m?

Задача 5. Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$. Докажите, что сравнения по одному и тому же модулю
а) можно складывать и вычитать: $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, $a - c \equiv b - d \pmod{m}$;
б) можно перемножать: $ac \equiv bd \pmod{m}$;
в) можно возводить в натуральную степень n: $a^n \equiv b^n \pmod{m}$;
г) можно домножать на любое целое число k: $ka \equiv kb \pmod{m}$.

Задача 6. Найдите остаток от деления **а)** числа $1 + 31 + 331 + \ldots + 3333333331$ на 3; **б)** 6^{100} на 7.

Задача 7. Найдите остаток от деления числа $1 - 11 + 111 - 1111 + \ldots - 1111111111$ на 9.

Задача 8. Найдите остатки от деления на 3 чисел $2N$, $100N$, 2^N, 100^N, 2007^N (ответ зависит от N).

Задача 9. Найдите остаток от деления **а)** $10!$ на 11; **б)** $11!$ на 12.

Задача 10. **а)** Какой цифрой оканчивается 8^{18}? **б)** При каких натуральных k число $2^k - 1$ кратно 7?

Задача 11. Найдите три последние цифры числа 1999^{2000}.

Задача 12. Докажите, что **а)** $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31; **б)** $43^{95} + 57^{95}$ делится на 100.

Задача 13. Докажите, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ делится на n при нечётном n.

Задача 14. Числа x и y целые, причем $x^2 + y^2$ делится на 3. Докажите, что и x и y делятся на 3.

Задача 15*. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых как сумма трёх или менее точных квадратов.

Задача 16. Даны 20 целых чисел, ни одно из которых не делится на 5. Докажите, что сумма двадцатых степеней этих чисел делится на 5.

Задача 17. Какие целые числа дают при делении на 3 остаток 2, а при делении на 5 — остаток 3?

Задача 18. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 есть или простое число или 1.

Задача 19*. Сколько есть способов записать 2018 как сумму натуральных слагаемых, любые два из которых равны или различаются на 1? (Способы лишь с разным порядком слагаемых считаем равными.)

Задача 20. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два таких числа, что
а) их разность делится на 51; **б)** их сумма или разность делится на 100.

Задача 21*. Докажите, что из любых n целых чисел всегда можно выбрать несколько, сумма которых делится на n (или одно число, делящееся на n).

Задача 22*. **а)** Докажите, что для любого натурального N существует делящееся на N натуральное число, все цифры которого только 0 и 1. **б)** Найдётся ли такое число вида $1\ldots10\ldots0$?

Задача 23*. Шайка из K разбойников отобрала у купца мешок с N монетами. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую монету ни отложи, оставшиеся монеты можно поделить между разбойниками так, что каждый получит одинаковую сумму. Докажите, что $N - 1$ делится на K.

1	2	3	4	5 а	5 б	5 в	5 г	6 а	6 б	7	8	9 а	9 б	10 а	10 б	11	12 а	12 б	13	14	15	16	17	18	19	20 а	20 б	21	22 а	22 б	23