



**Задача 1.** Рассмотрим последовательность «уголков»: , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , ,

**а)** Сколько клеток в  $k$ -том уголке? **б)** Чему равна суммарная площадь первых  $k$  уголков?

**Задача 2.** а) Чему равно  $k$ -е нечётное число и сумма первых  $k$  нечётных чисел?

б) Чему равно  $k$ -е чётное число и сумма первых  $k$  чётных чисел?

в) Вычислите сумму 100 последовательных нечётных чисел, начиная со 179.

**Задача 3.** Числа  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 3$ ,  $T_3 = 6$ ,  $T_4 = 10$ , ... греческий математик Диофант называл *треугольными*.  , ... Четырёхугольные числа  , ... — это квадраты.

а) Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат.

б) Что получится при сложении  $T_n$  с  $T_n$ ?

в)° Выразив  $T_n$  через  $n$ , найдите сумму  $1 + 2 + 3 + \dots + n$ .

**Задача 4.** а) Чему равна сумма первой сотни натуральных чисел?

б) А сумма второй сотни?

**Задача 5.** Докажите геометрически, что  $T_{m+n} = T_m + T_n + mn$ .

**Задача 6.** (Пифагорова таблица умножения)

**а)** Докажите тождество  $mk = km$

(т.е. докажите, что  $\underbrace{k + k + \dots + k}_m = \underbrace{m + m + \dots + m}_k$ ).

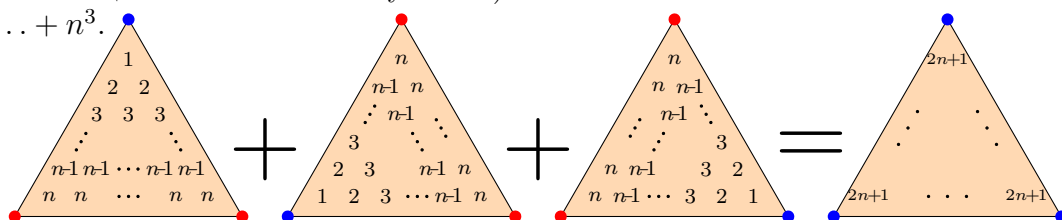
б) Каковы размеры и площадь таблицы на рисунке 1?

**Задача 7.** а) Докажите геометрически, что  $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = n^2$ .

б) Сколько клеток в  $k$ -м, считая от левого верхнего угла пифагоровой таблицы, «толстом» уголке, «вершина» которого — квадрат  $k \times k$ , а «стороны» составлены из прямоугольников  $1 \times k$ ,  $2 \times k$ ,  $\dots$ ,  $(k-1) \times k$ ? (На рисунке 1 зелёным цветом отмечен 4-й уголок.)

в) Найдите сумму  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ .

**Задача 8.** Объясните равенство на рисунке 2 и получите формулу для суммы квадратов  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ .

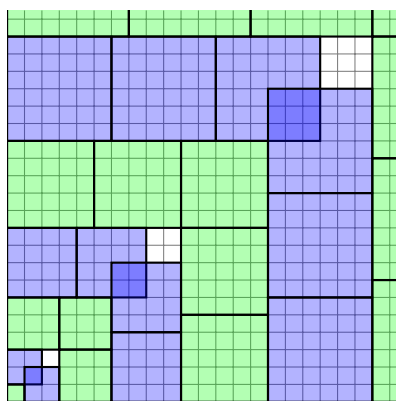


**Рис. 2.** Сумма квадратов — 1

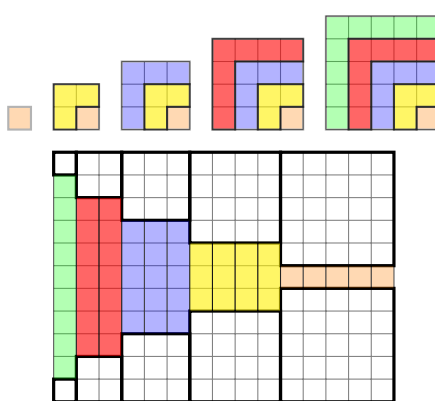
**Задача 9\*.** С помощью рисунка 3 получите ещё один способ найти формулу для суммы кубов.

**Задача 10\*.** С помощью рисунка 4 получите ещё один способ найти формулу для суммы квадратов.

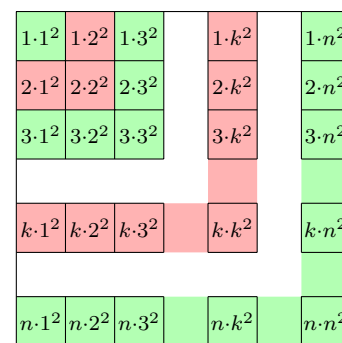
**Задача 11\*\*.** Используя таблицу на рисунке 5, выведите формулу для суммы  $1^4 + 2^4 + \dots + n^4$ .



**Рис. 3.** Сумма кубов — 2



**Рис. 4.** Сумма квадратов — 2



**Рис. 5.** Сумма четвёртых степеней

$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{\overline{6}}$	$\frac{2}{a}$	$\frac{2}{\overline{6}}$	$\frac{2}{B}$	$\frac{3}{a}$	$\frac{3}{\overline{6}}$	$\frac{3}{B}$	$\frac{4}{a}$	$\frac{4}{\overline{6}}$	5	$\frac{6}{a}$	$\frac{6}{\overline{6}}$	$\frac{7}{a}$	$\frac{7}{\overline{6}}$	$\frac{7}{B}$	8	9	10	11