Гомотопии

Определение 1. Пусть X, Y — топологические пространства, f, g — два непрерывных отображения X в Y. Отображения f и g называются *гомотопными,* если существует такое непрерывное отображение $F : [0,1] \times X \to Y$, что $F(0,x) = f(x)$, $F(1,x) = g(x)$ для любого $x \in X$. Отображение F называется *гомотопией, связывающей f с g.*

Задача 1. Докажите, что гомотопность отображений — отношение эквивалентности.

Задача 2. Докажите, что любые два непрерывных отображения из X в Y гомотопны, если **а)** X — любое, $Y = [0,1]$; **б)** X — любое, $Y = \mathbb{R}$; **в)** $X = [0,1]$, Y — линейно связное.

Определение 2. Пусть X — метрическое пространство, a, b — две его точки, $f(t), g(t)$ — два пути с началом в точке a и концом в точке b. Пути f и g называются *гомотопными,* если существует такое непрерывное отображение $F : [0,1] \times [0,1] \to X$, что $F(0,t) = f(t)$, $F(1,t) = g(t)$, $F(\tau,0) = a$, $F(\tau,1) = b$ для любых $t, \tau \in [0,1]$. Отображение F называется *гомотопией, связывающей f с g.*

Напоминание. Мы обозначаем через S^1 окружность единичного радиуса в плоскости $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат, причем саму плоскость мы отождествляем со множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$. Таким образом,
$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{2\pi it} \mid t \in [0,1]\}.$$

Задача 3. Пусть f, g — два пути в X. Определим отображение h окружности S^1 в X, положив
$$h\left(e^{2\pi it}\right) = \begin{cases} f(2t), & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ g(2-2t), & \text{при } 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Докажите, что пути f и g гомотопны тогда и только тогда, когда отображение h гомотопно постоянному отображению (то есть, переводящему окружность S^1 в одну точку).

Степень отображения

Степенью непрерывного отображения окружности в себя называется, говоря неформально, число раз, которое окружность на себя «наматывается» при этом отображении. Для того, чтобы дать точное определение, нам понадобится некоторая подготовка.

Определение 3. Пусть $f : X \to S^1$ и $g : X \to \mathbb{R}$ — непрерывные отображения метрического пространства X. Отображение g называется *поднятием* отображения f на $\mathbb{R}$, если $f(x) = e^{2\pi i g(x)}$ для любого $x \in X$.

Задача 4. Пусть $X = [0,1]$, $f(x) = e^{2\pi ix}$. Опишите все поднятия отображения f на $\mathbb{R}$.

Задача 5. Пусть $X = S^1$, $f(x) = x$. Существует ли поднятие у этого отображения?

Задача 6. Пусть f — некоторый путь в окружности S^1, то есть непрерывное отображение $f : [0,1] \to S^1$.
а) Докажите, что у пути f существует поднятие на прямую $\mathbb{R}$.
б) Пусть g_1, g_2 — поднятия f на $\mathbb{R}$. Докажите, что $g_1(t) - g_2(t) = k$, где k — некоторая целая константа.

Указание. Рассмотрите сначала путь f, лежащий в полуокружности; затем воспользуйтесь равномерной непрерывностью непрерывной функции на отрезке.

Определение 4. Пусть $h : S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение. Рассмотрим путь $f(t) = h(e^{2\pi it})$ и его поднятие $g(t)$. Число $g(1) - g(0)$ называется *степенью отображения h.*

Задача 7. Докажите, что степень отображения $h : S^1 \to S^1$ определена корректно (то есть не зависит от выбора поднятия).

Задача 8. Чему равна степень отображения $h(z) = z^n$, где n — целое число?

Задача 9. Пусть $h : S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение, $w_0 \in S^1$. Назовем точку $z_0 \in S^1$ *положительным прообразом* точки w_0, если $h(z_0) = w_0$ и при проходе z через z_0 против часовой стрелки значение $h(z)$ проходит через w_0 в том же направлении. Строго последнее условие записывается так: для всех z из некоторой окрестности точки z_0 комплексное число $h(z)/w_0$ имеет мнимую часть того же знака, что и мнимая часть z/z_0. Аналогично определяем *отрицательный прообраз* точки w_0 (при проходе через него против часовой стрелки $h(z)$ проходит через w_0 по часовой стрелке).

Предположим, что у точки w_0 конечное число прообразов, причем все они либо положительные, либо отрицательные. Докажите, что степень отображения h равна разности числа положительных прообразов точки w_0 и числа ее отрицательных прообразов.

1	2 а	2 б	2 в	3	4	5	6 а	6 б	7	8	9

Задача 10. **а)** Докажите, что у любого непрерывного отображения квадрата $[0,1]\times[0,1]$ в окружность есть поднятие на прямую. **б)** Пусть f_1 и f_2 — гомотопные пути в окружности. Докажите, что у них существуют гомотопные поднятия на прямую.

Задача 11. Докажите, что степень отображения $f: S^1 \to S^1$ не меняется при гомотопии.

Задача 12. **а)** Докажите, что если отображение $f: S^1 \to S^2$ не является сюрьекцией, то оно гомотопно отображению в точку. **б)** Докажите, что двумерная сфера S^2 не гомеоморфна двумерному тору $T^2 = S^1 \times S^1$.

Задача 13. Отображение окружности в себя называется *нечетным,* если диаметрально противоположные точки переходят в диаметрально противоположные, и *четным,* если диаметрально противоположные точки переходят в одну и ту же точку. Докажите, что степень нечетного отображения — нечетное число, а степень четного отображения — четное число.

Порядок замкнутой кривой относительно точки

Определение 5. *Замкнутой кривой* в пространстве X называется путь, у которого конец совпадает с началом.

Определение 6. Пусть γ — замкнутая кривая на плоскости $\mathbb{R}^2$, которую мы отождествляем с $\mathbb{C}$, а P — точка плоскости, не лежащая на кривой γ. Рассмотрим следующее отображение окружности S^1 в себя:
$$e^{2\pi it} \mapsto \frac{\gamma(t)-P}{|\gamma(t)-P|}.$$
Степень этого отображения называется *порядком кривой γ относительно точки P* и обозначается $\mathrm{ord}_P(\gamma)$.

Задача 14. Нарисуйте кривые γ_1 и γ_2 и найдите их порядки относительно точек $(0,0)$, $(1,0)$ и $(-1,0)$, где
$$\gamma_1(t) = (\cos(2\pi t) - 1/2, \sin(4\pi t)) \quad \text{и} \quad \gamma_2(t) = (\cos(2\pi t)/2 + 3\cos(4\pi t)/4, \sin(4\pi t)).$$

Задача 15. Пусть γ — замкнутая кривая в плоскости $\mathbb{R}^2$, а P — точка плоскости, не лежащая на кривой γ. Проведем произвольный луч l из точки P. Определите понятия положительной и отрицательной точки пересечения луча l с кривой γ так, чтобы было верно утверждение: если существует лишь конечное число точек пересечения луча l с кривой γ, причем все они либо положительны, либо отрицательны, то $\mathrm{ord}_P(\gamma)$ равен разности числа положительных и числа отрицательных точек пересечения.

Задача 16. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n с комплексными коэффициентами. Докажите, что порядок кривой $\gamma_R(t) = f(Re^{2\pi it})$ относительно точки $0 \in \mathbb{C}$ при $R \gg 0$ равен n.

Задача 17. Поставим в соответствие каждой замкнутой кривой γ в $\mathbb{R}^2$, не проходящей через точку P, отображение $\check{\gamma}: S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$:
$$\check{\gamma}(e^{2\pi it}) = \gamma(t).$$
Докажите, что если отображения $\check{\gamma}_1$ и $\check{\gamma}_2$ гомотопны, то $\mathrm{ord}_P(\gamma_1) = \mathrm{ord}_P(\gamma_2)$.

Задача 18. Пусть f — непрерывное отображение единичного круга в плоскость, $\gamma(t) = f(e^{2\pi it})$, P — точка, не лежащая на кривой γ. Докажите, что если $\mathrm{ord}_P(\gamma) \neq 0$, то уравнение $f(x) = P$ имеет решение.

Задача 19. (*Основная теорема алгебры*) Докажите, что любой непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Задача 20. Пусть γ — замкнутая кривая на плоскости, P — точка, не лежащая на ней. Докажите, что

а) если точка P соединена с точкой P' путем, не пересекающим кривую γ, то выполнено равенство: $\mathrm{ord}_P(\gamma) = \mathrm{ord}_{P'}(\gamma)$.

б) найдется такая окрестность точки P, что относительно любой точки из нее порядок γ такой же, как и относительно P.

Задача 21. (*Н.Н.Константинов*) Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A и связанные веревкой длины 2, смогли проехать в B, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса 1, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

Задача 22. На плоскости нарисован граф Г. Его образ при сдвиге на некоторый вектор длины 1 не пересекается с Г. По графу ползают два круглых жука диаметром 1 (центр каждого жука все время принадлежит Г). Могут ли они поменяться местами?

10 а	10 б	11	12 а	12 б	13	14	15	16	17	18	19	20 а	20 б	21	22