Пусть перед обществом из n человек стоит задача выбора одной альтернативы из данных l возможностей. Пусть каждый участник упорядочивает эти альтернативы по возрастанию предпочтительности для него, то есть его мнение задаётся некоторой *перестановкой* этих альтернатив. (Для простоты считаем, что никакие две альтернативы для участника не безразличны). Упорядоченный набор из n таких перестановок назовём *профилем индивидуальных предпочтений.* Множество всех возможных профилей обозначим Π.

Систему голосования можно представить в виде чёрного ящика, который, получая на вход профиль индивидуальных предпочтений, выдаёт некоторую альтернативу (она будет считаться «наилучшей для общества»). Математически это можно описать как отображение (функцию) из множества Π (или некоторого его подмножества, если чёрный ящик «срабатывает» не всегда) во множество альтернатив A.

В простом случае, когда имеются ровно 2 альтернативы, часто применяется *правило абсолютного большинства:* выбирается альтернатива, предпочтительная для более чем половины участников. Достоинства: очевидны. Недостатки: Во-первых, даёт результата при равенстве голосов. Во-вторых, не учитывает «силы предпочтения». Например, если для участника p_1 крайне важно выбрать альтернативу a_1, а для p_2 и p_3 альтернатива a_2 лишь незначительно предпочтительнее, чем a_1, то иногда можно было бы и согласиться с p_1.

Задача 1. Большинством голосов признано, что утверждение B истинно, и что из B следует C. Можно ли быть уверенным, что по мнению большинства истинно также и C ?

Рассмотрим случай $l > 2$. Можно взять любую пару альтернатив и сравнить их по правилу большинства («дуэль»). Для простоты будем полагать, что «ничьих» не бывает.

Задача 2. Рассмотрим следующую «дуэльную» процедуру при $l > 2$. На голосование ставится произвольная пара кандидатов, проигравший выбывает. Затем выигравший ставится на голосование с ещё не рассмотренным кандидатом. И так далее, пока не останется единственный кандидат, который и объявляется победителем. Верно ли, что результат этой процедуры не может зависеть от порядка выбора пар для «дуэлей», если каждый участник голосует в соответствии со своими неизменными предпочтениями?

Задача 3. **а)** Всегда ли отношение «a_1 предпочтительнее для большинства, чем a_2» транзитивно? **б)** Пусть $l = 3$. Верно ли, что указанное отношение транзитивно тогда и только тогда, когда результат описанной в задаче 2 процедуры не зависит от порядка постановки на голосование? А если $l > 3$?

Определение 1. Альтернатива, которая выигрывает подобную дуэль с любой другой альтернативой, называется *победителем по Кондорсе.*

Задача 4. Съезд партии выбирает председателя из кандидатур A, B и C, которые имеют 44, 30 и 26 сторонников соответственно. Если в первом туре никто не наберёт больше 50%, то будет второй тур. В нём не будет участвовать кандидат, набравший минимальное количество голосов. Известно, что при непопадании своего кандидата во второй тур сторонники C будут голосовать за B, а голоса сторонников B разделятся поровну между A и C. Кто выиграет выборы? Достаточно ли данных для определённого ответа?

Определение 2. Если участник голосует в соответствии со своими истинными предпочтениями, такое голосование назовём *искренним.* Если же он голосует вопреки своим предпочтениям (но с тем, чтобы в конечном итоге достичь лучших с его точки зрения результатов), такое голосование назовём *тактическим.*

Задача 5. Дополнительно известно, что если бы A не прошёл во второй тур, то его голоса перешли бы к C. Пусть выборы проводятся по новой системе: каждый избиратель заполняет бюллетень лишь 1 раз, при этом ранжируя все кандидатуры в порядке предпочтения, а затем бюллетени обрабатываются по дуэльной процедуре. Какой из кандидатов может победить, если первая дуэль проводится между A и B?

Задача 6. Решается вопрос постройки нового супермаркета в деревне, где все дома довольно плотно расположены вдоль длинной улицы. На этой улице имеется l подходящих мест. Место выбирается голосованием, при этом каждый хочет, чтобы магазин был поближе к его дому. (Примечание: вместо длинной улицы можно рассмотреть одномерный политический спектр «правые-левые»). **а)** Если сравнить каждую пару мест путём дуэльного голосования, обязательно ли полученное отношение предпочтения будет транзитивным? **б)** Укладываются ли в модель «линейного политического спектра» условия задач 4 и 5?

Задача 7. Пусть $l = 3$ и при данном профиле индивидуальных предпочтений существует победитель по Кондорсе. Может ли он проиграть при дуэльной процедуре?

Задача 8*. Предложите систему голосования (более) устойчивую к тактическому голосованию.

1	2	3 а	3 б	4	5	6 а	6 б	7	8