Листок №AG-4 **Плоские алгебраические кривые** 01.2017

Часть 1. Многочлены от двух переменных

Определение 1. *Одночленом от двух переменных* x и y (над $\mathbb{R}$) называется выражение вида $ax^m y^n$, где $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Сумма нескольких одночленов такого вида (с приведенными подобными) называется *многочленом от двух переменных* x и y. Сумма и произведение многочленов от двух переменных определяются аналогично сумме и произведению многочленов от одной переменной. Множество всех многочленов от x, y (над $\mathbb{R}$) обозначают $\mathbb{R}[x, y]$.

Задача 1. Дайте определение степени многочлена $A \in \mathbb{R}[x, y]$ (обозначается $\deg A$).

Задача 2. Пусть $A(x, y)$, $B(x, y)$ — ненулевые многочлены.
а) Докажите, что $\deg AB = \deg A + \deg B$. **б)** Что можно сказать о величине $\deg(A + B)$?

Задача 3. Дайте определение деления с остатком для многочленов от двух переменных. Всегда ли такое деление возможно?

Задача 4. Дайте определение неприводимого (над $\mathbb{R}$) многочлена из $\mathbb{R}[x, y]$.

Задача 5. Докажите неприводимость многочленов: **а)** $x^2 + y^2 - 1$; **б)** $y^2 - x$; **в)** $xy - 1$.

Задача 6. Докажите, что множество $\mathbb{R}(y) = \left\{ \dfrac{P(y)}{Q(y)} \;\middle|\; P(y), Q(y) \in \mathbb{R}[y],\ Q(y) \neq 0 \right\}$ (с обычными операциями сложения и умножения) является полем.

Задача 7. Рассмотрим множество многочленов от x над полем $\mathbb{R}(y)$, т. е. множество $\mathbb{R}(y)[x]$. Каждый его элемент записывается в виде

$$a_n(y)x^n + a_{n-1}(y)x^{n-1} + \ldots + a_1(y)x + a_0(y), \tag{$*$}$$

где $n \in \mathbb{Z}^+$, $a_i(y) \in \mathbb{R}(y)$ при $i = \overline{0, n}$. Дайте определение неприводимого (над $R(y)$) многочлена из $\mathbb{R}(y)[x]$. Верна ли для многочленов из $\mathbb{R}(y)[x]$ теорема о единственности разложения на неприводимые сомножители?

Определение 2. Запишем произвольный многочлен $A(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ в виде $(*)$, где уже $a_i(y) \in \mathbb{R}[y]$ при $i = \overline{0, n}$. Скажем, что $A(x, y)$ является *примитивным (по x)*, если многочлены $a_n(y), \ \ldots, \ a_0(y)$ взаимно просты.

Задача 8. Докажите, что произведение двух примитивных (по x) многочленов также является примитивным (по x) многочленом.

Задача 9. Докажите, что если многочлен из $\mathbb{R}[x, y]$ неприводим, то он неприводим и как многочлен из $\mathbb{R}(y)[x]$. Верно ли обратное?

Задача 10. Докажите, что любой многочлен из $\mathbb{R}[x, y]$ однозначно (с точностью до множителей из $\mathbb{R}$) раскладывается в произведение неприводимых над $\mathbb{R}$ многочленов.

1	2 а	2 б	3	4	5 а	5 б	5 в	6	7	8	9	10