Многочлены на полем

Обозначения. В этом листке символом $\mathbb{K}$ всегда будет обозначаться некоторое поле. Множество всех многочленов с коэффициентами из $\mathbb{K}$ обозначается $\mathbb{K}[x]$.

Задача 1. Дайте определение суммы и произведения многочленов из $\mathbb{K}[x]$.

Определение 1. Многочлен положительной степени из $\mathbb{K}[x]$ называется *неприводимым* (*над* $\mathbb{K}$), если он не может быть представлен в виде произведения двух многочленов меньшей степени из $\mathbb{K}[x]$.

Задача 2. Докажите, что над любым полем существует бесконечно много неприводимых многочленов.

Задача 3. Разложите на неприводимые множители над $\mathbb{R}$:
а) $5x+7$; **б)** x^2-2; **в)** x^3+x^2+x+1; **г)** x^2+1; **д)** $x^3-6x^2+11x-6$; **е)** x^4+4.

Определение 2. Многочлен со старшим коэффициентом 1 называется *приведённым.*

Определение 3. *Наибольшим общим делителем* (НОД(A,B)) двух многочленов A и B из $\mathbb{K}[x]$, хотя бы один из которых ненулевой, называют приведённый многочлен наибольшей степени, который делит и A, и B.

Задача 4. **а)** Верно ли, что НОД$(A,B) =$ НОД$(A, B-A\cdot C)$, где C — любой многочлен?
б) Сформулируйте и докажите алгоритм Евклида вычисления НОД многочленов.

Задача 5. Докажите, что НОД(A,B) делится на любой общий делитель A и B.

Задача 6. Пусть многочлены $A(x)$ и $B(x)$ из $\mathbb{K}[x]$ *взаимно просты* (то есть, НОД$(A,B)=1$). Докажите, что тогда существуют такие многочлены $U(x)$ и $V(x)$ из $\mathbb{K}[x]$, что $AU+BV=1$.

Задача 7. Докажите, что если неприводимый над $\mathbb{K}$ многочлен $P(x)$ из $\mathbb{K}[x]$ делит произведение двух многочленов $A(x)$ и $B(x)$ из $\mathbb{K}[x]$ ненулевой степени, то он делит один из этих многочленов.

Задача 8. Докажите, что любой многочлен из $\mathbb{K}[x]$ однозначно (с точностью до множителей из $\mathbb{K}$) раскладывается в произведение неприводимых над $\mathbb{K}$ многочленов.

Многочлены с целыми коэффициентами

Обозначение. Множество многочленов с целыми коэффициентами обозначается $\mathbb{Z}[x]$.

Определение 4. Многочлен положительной степени из $\mathbb{Z}[x]$ называется *неприводимым* (*над* $\mathbb{Z}$), если он не может быть представлен в виде произведения двух многочленов меньшей степени из $\mathbb{Z}[x]$. (Это определение несколько отличается от общепринятого: обычно требуют еще, чтобы коэффициенты многочлена были взаимно просты).

Задача 9. (*Признак Эйзенштейна*) Если для многочлена $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ можно указать такое простое число p, что старший коэффициент этого многочлена не делится на p, а все остальные коэффициенты делятся на p, причём свободный член этого многочлена, делясь на p, не делится на p^2, то многочлен $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

Задача 10. Докажите, что следующие многочлены неприводимы над $\mathbb{Z}$:
а) $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$; **б)** $x^5-12x^3+36x-12$

Задача 11. Пусть $p, p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа. Докажите, что многочлены
а) x^n-p; **б)** $x^n-p_1\ldots p_k$ неприводимы над $\mathbb{Z}$.

Задача 12. Какие из многочленов задачи 4 неприводимы над $\mathbb{Z}$?

Задача 13. Докажите, что многочлен $P(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$ неприводим над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда n — простое число. (*Указание:* рассмотрите многочлен $P(x+1)$.)

1	2	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	3 е	4 а	4 б	5	6	7	8	9	10 а	10 б	11 а	11 б	12	13