**Задача 1.** В каждой клетке бесконечной шахматной доски сидит по зайцу (все зайцы одинаковы и одинаково расположены).

**а)** Охотник стреляет по направлению с иррациональным тангенсом угла наклона к линиям доски. Докажите, что он попадет хотя бы в одного зайца.

**б)** Докажите, что если тангенс угла наклона рационален, то достаточно малых зайцев можно расположить так, что охотник промахнется.

**Задача 2.** Конь прыгает скачками $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ по полю, где квадратно-гнездовым способом посеяна кукуруза. Докажите, что он обязательно сшибет хотя бы один росток (конь сшибает росток только в том случае, если приземляется на него; в прыжках конь ростки не задевает).

**Определение 1.** *Коэффициентом качества* приближения $p/q$ иррационального числа $\alpha$ (где $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$) называется число

$$q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

Из двух приближений лучшим считается то, у которого меньший коэффициент качества.

**Задача 3.** Какое из приближений числа $\sqrt{2}$ лучше: 3/2; 7/5 или 1,41?

**Задача 4.** Пусть $\alpha$ — некоторое иррациональное число. Докажите, что для любого $q \in \mathbb{N}$ существует приближение $p/q \in \mathbb{Q}$ числа $\alpha$ с коэффициентом качества, меньшим 1/2.

**Задача 5.** Докажите, что для любых натуральных чисел $N$, $k$ и любого иррационального числа $\alpha$ существует по крайней мере $k$ таких различных дробей $p/q \in \mathbb{Q}$, что $q \leqslant Nk$ и $q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{N}$.

**Задача 6.** Докажите, что для любого $\alpha \notin \mathbb{Q}$ и для сколь угодно большого $N$ существует бесконечно много различных приближений $p/q \in \mathbb{Q}$ с коэффициентом качества, меньшим $1/N$.

**Задача 7.** Пусть число $\alpha$ иррационально. Докажите, что существует бесконечно много таких рациональных чисел $p/q$, что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

**Определение 2.** Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется *$t$-неприближаемым*, если найдется такое положительное число $c \in \mathbb{R}$, что при любых $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ выполнено одно из двух условий:

$$\alpha = \frac{m}{n} \qquad \text{или} \qquad \left|\alpha - \frac{m}{n}\right| > \frac{c}{n^t}.$$

**Задача 8.** Докажите, что рациональные числа 1-неприближаемы.

**Задача 9.** Докажите, что число $e = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}$ иррационально.

**Задача 10.** Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$ — корень многочлена $A(x)$ степени $n \in \mathbb{N}$ с целыми коэффициентами. **а)** Докажите, что для любого рационального числа $p/q$, не являющегося корнем $A(x)$, справедливо неравенство $|q^n A(p/q)| \geqslant 1$. **б)** Докажите, что $\alpha$ является $n$-неприближаемым.

**Задача 11.** Докажите, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i!}}$ сходится к *трансцендентному числу,* т. е. к такому числу, которое не может быть корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами.

**Задача 12*.** Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ множество действительных чисел, не являющихся $(2+\varepsilon)$-неприближаемыми, имеет меру 0 (т. е. для каждого $\delta > 0$ это множество можно покрыть счётной системой интервалов, сумма длин которой меньше $\delta$).

**Задача 13**.** **а)** (*Теорема Гурвица–Бореля*) Докажите, что для любого иррационального числа $\alpha$ существует бесконечно много таких его приближений $p/q \in \mathbb{Q}$, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2\sqrt{5}}$.

**б)** Число $\sqrt{5}$ в условии теоремы пункта а) нельзя увеличить: найдутся иррациональные числа, имеющие лишь конечное число приближений, удовлетворяющих неравенству измененной теоремы.

| 1 а | 1 б | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 а | 10 б | 11 | 12 | 13 а | 13 б |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | |