Мы знаем, что аффинные преобразования сохраняют отношение отрезков, лежащих на одной прямой и знаем, что проективные преобразования не сохраняют. В этом листочке мы выясним, что есть некое отношение, уже не двух, а четырёх, отрезков, лежащих на одной прямой, которое сохраняется при проективных преобразованиях.

Определение. Пусть A, B, C, D — точки на одной прямой l, причём $\{A, B\} \cap \{C, D\} = \emptyset$. Их *двойным отношением* называется

$$[A, B, C, D] = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

где отношение отрезков берётся со знаком (положительно, если направления отрезков от начала к концу совпадает и отрицательно в противном случае). Если одна из точек является бесконечно удалённой, то двойное отношение равно *простому* отношению остальных трёх точек, то есть, например, $[A, B, C, \infty] = CA : CB$, и т. п.

Пусть a, b, c, d — прямые в плоскости π, проходящие через (конечную) точку O, причём $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$. Их *двойным отношением* называется

$$[a, b, c, d] = \frac{\sin \angle ca}{\sin \angle cb} : \frac{\sin \angle da}{\sin \angle db},$$

где на каждой прямой выбрано направление и угол между прямыми — это угол, отсчитанный против часовой стрелки от выбранного направления на первой прямой до выбранного направления на второй прямой.

1. Пусть a, b, c, d — прямые в плоскости π, проходящие через точку O, причём $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$, прямая $l \subset \pi$ не проходит через O, а точки A, B, C, D суть точки пересечения прямой l с прямыми a, b, c, d соответственно. Докажите, что $[a, b, c, d] = [A, B, C, D]$.

2. Докажите, что двойные отношения сохраняются при проективных преобразованиях.
(Полезно помнить, что проективное преобразование, которое не сохраняет обычные отношения — это центральное проектирование.)

3. Как меняется двойное отношение $[A, B, C, D]$ при перестановках точек A, B, C, D? Сколько различных значений двойного отношения так получается (для точек в общем положении)?

4. Пусть на проективной плоскости $\bar{\pi}$ выбраны прямые k, l, m, n, никакие три из которых не конкуррентны. Пусть $A = k \cap l$, $B = m \cap n$, $E = k \cap m$, $F = k \cap n$, $G = l \cap m$, $H = l \cap n$, $C = AB \cap EH$, $D = AB \cap FG$. Докажите, что $[A, B, C, D] = -1$ (точки C и D *гармонически сопряжены* относительно отрезка AB).

5. Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — произвольный многоугольник на плоскости $\bar{\pi}$, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — точки, расположенные на его сторонах или их продолжениях. Докажите, что выражение

$$\frac{A_1M_1}{A_2M_1} \cdot \frac{A_2M_2}{A_3M_2} \cdots \frac{A_nM_n}{A_1M_n}$$

сохраняется при проективных преобразованиях.

6. (*Теорема Чевы*) На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC (или на продолжениях этих сторон) выбрали соответственно точки C', B' и A'. Выведите из задачи 5, что прямые AA', BB' и CC' конкуррентны тогда и только тогда, когда

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = -1.$$

7. (*Теорема Чевы в углах*) На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC (или на продолжениях этих сторон) выбрали соответственно точки C', B' и A'. Выведите из задачи 5, что прямые AA', BB' и CC' конкуррентны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin \angle BAA'}{\sin \angle CAA'} \cdot \frac{\sin \angle ACC'}{\sin \angle BCC'} \cdot \frac{\sin \angle CBB'}{\sin \angle ABB'} = -1.$$

8. Пусть в окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$, причём

$$\frac{AB \cdot CD \cdot EF}{BC \cdot DE \cdot FA} = 1.$$

Докажите, что диагонали AD, BE и CF конкуррентны.