Аффинные преобразования плоскости

Определение. Пусть в пространстве заданы две плоскости π и π', параллельные или непараллельные между собой. Пусть l — прямая, не параллельная ни π, ни π'. *Параллельной проекцией* π *на* π' *вдоль* l называется отображение, сопоставляющее каждой точке $P \in \pi$ такую точку $P' \in \pi'$, что прямая PP' параллельна прямой l. Любое отображение плоскости π на плоскость π', которое можно представить в виде композиции параллельных проекций, называется *аффинным*. Аффинное отображение плоскости π на себя называется *аффинным преобразованием*.

1. Докажите, что следующие преобразования являются аффинными: **а)** параллельный перенос; **б)** осевая симметрия; **в)** поворот; **г)** любое движение.

Определение. *Аффинным* называется преобразование плоскости, переводящее каждую прямую в прямую и параллельные прямые в параллельные прямые.

Определение. *Сжатием к прямой* l с коэффициентом k называется преобразование плоскости, переводящую произвольную точку M в такую точку M', что точки M и M' лежат по одну сторону от прямой l, прямая MM' перпендикулярна l и $OM = OM' \cdot k$, где O — точка пересечения l и MM'.

Теорема 1. *Любое аффинное преобразование можно представить как композицию сжатия к прямой и подобия.*

2. Докажите эквивалентность двух определений аффинного преобразования.

3. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два произвольных треугольника. Докажите, что существует ровно одно аффинное преобразование, переводящее треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$ с сохранением порядка вершин.

4. Зададим на плоскости прямоугольную систему координат. Докажите, что следующие отображения являются аффинными преобразованиями: **а)** $(x, y) \mapsto (ax, y)$, где $a \neq 0$; **б)** гомотетия с центром в начале координат; **в)** любое преобразование подобия; **г)** $(x, y) \mapsto (x + by, y)$, где b — любое число; **д)** $(x, y) \mapsto (ax + by + \alpha,\ cx + dy + \beta)$, где $ad - bc \neq 0$.

5. Докажите, что аффинные преобразования **а)** переводят прямые в прямые; **б)** переводят отрезки в отрезки; **в)** переводят параллельные прямые в параллельные прямые; **г)** сохраняют отношения длин отрезков, лежащих на параллельных прямых; **д)** переводят параллелограммы в параллелограммы; **е)** сохраняют отношения площадей.

Применения аффинных преобразований

6. Используйте аффинные преобразования для доказательства того, что три медианы любого треугольника пересекаются в одной точке.

7. Используйте аффинные преобразования для доказательства «замечательного свойства трапеции»: в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

8. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки M, N, P и построены симметричные им точки M_1, N_1, P_1 относительно середин этих сторон соответственно. Докажите, что треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ равновелики.

9. Пусть M, N и P — точки, расположенные на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC и делящие эти стороны в одинаковых отношениях ($\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$). Докажите, что

а) точка пересечения медиан треугольника MNP совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC;

б) точка пересечения медиан треугольника, образованного прямыми AN, BP и CM, совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

10. Пусть у четырехугольника $ABCD$ никакие две стороны не параллельны. Докажите, что прямая, соединяющая середины его диагоналей, делит пополам отрезок, соединяющий точки пересечений продолжений противоположных сторон.

11. Докажите, что с помощью только односторонней линейки без делений и карандаша нельзя опустить перпендикуляр на данную прямую.

12. Выпуклый пятиугольник P гомотетичен пятиугольнику, построенному на серединах его сторон. Обязательно ли тогда P — правильный?

13*. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбрали соответственно точки K, L и M так, что $AK : KB = BL : LC = CM : MA = 1 : \sqrt{3}$. Прямые AL, BM и CK пересекаются в точках A', B' и C', образуя новый треугольник, на сторонах которого аналогичным образом выбирают точки K', L', M' и получают треугольник $A''B''C''$, и так далее. Докажите, что на каком-то шаге мы получим треугольник, подобный исходному.

	Фамилия, Имя	1 а	1 б	1 в	1 г	2	3	4 а	4 б	4 в	4 г	4 д	5 а	5 б	5 в	5 г	5 д	5 е	6	7	8	9 а	9 б	10	11	12	13 *
1.	Андреев Валентин																										
2.	Большаков Иван																										
3.	Гайворонский Андрей																										
4.	Говорухин Ярослав																										
5.	Дегтярев Федор																										
6.	Денисенко Анна																										
7.	Зайцев Андрей																										
8.	Карпов Андрей																										
9.	Константиновский Никита																										
10.	Левинсон Татьяна																										
11.	Луценко Михаил																										
12.	Мирошниченко Вероника																										
13.	Нагайко Иван																										
14.	Назаров Борис																										
15.	Парубченко Александр																										
16.	Перунов Иван																										
17.	Пчелина Дарья																										
18.	Рудько Юрий																										
19.	Скурида Василий																										
20.	Смык Екатерина																										
21.	Фельдшеров Святослав																										
22.	Чибрикин Тимофей																										
		а 1	б 1	в 1	г 1	2	3	а 4	б 4	в 4	г 4	д 4	а 5	б 5	в 5	г 5	д 5	е 5	6	7	8	а 9	б 9	10	11	12	13