

**Определение.** Преобразование плоскости называется *преобразованием подобия* или *подобием*, если для любых двух точек  $A$  и  $B$  и их образов  $A'$  и  $B'$  выполняется равенство  $AB = k \cdot A'B'$  где  $k$  — постоянное (положительное) число, называемое *коэффициентом подобия*.

**Определение.** Композиция гомотетии и поворота, имеющих общий центр, называется *поворотной гомотетией*.

1. Докажите, что преобразование подобия есть композиция гомотетии и движения.
2. Докажите, что преобразование подобия отображает а) прямую на прямую, отрезок на отрезок; б) параллельные прямые на параллельные прямые; в) луч на луч, полуплоскость на полуплоскость; г) угол на равные ему угол; д) докажите, что преобразование подобие сохраняет отношение длин отрезков.
3. Пусть  $A, B, C$  — три неколлинеарные точки плоскости, а точки  $A_1, B_1, C_1$  таковы, что  $A_1B_1 = kAB$ ,  $A_1C_1 = kAC$ ,  $B_1C_1 = kBC$ . Докажите, что существует единственное преобразование подобия плоскости при котором точки  $A, B, C$  отображаются соответственно на точки  $A_1, B_1, C_1$ .
4. Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок  $AB$  в  $A_1B_1$ , совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок  $AA_1$  в  $BB_1$ .
5. Пусть  $P$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $A_1B_1$ . Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящий отрезок  $AB$  в  $A_1B_1$  совпадает с точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников  $PA A_1$  и  $P B B_1$ , отличной от точки  $P$ , причём такая поворотная гомотетия единственна.
6. (*точка Микеля.*) Четыре пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что четыре окружности, описанные около этих треугольников, имеют одну общую точку.
7. Дан треугольник  $ABC$ , в котором угол при вершине  $C$  прямой и проведена высота  $CD$ . Докажите, что медианы  $AM$  и  $CN$  в треугольниках  $ADC$  и  $DBC$  перпендикулярны.
8. Дан квадрат  $ABCD$ . Точки  $P$  и  $Q$  лежат на сторонах  $AB$  и  $BC$  соответственно, причём  $BP = BQ$ .  $BK$  — высота треугольника  $BPC$ . Докажите, что  $DK \perp KQ$ .
9. Из произвольной точки  $M$  окружности, описанной около треугольника  $ABC$  опущены перпендикуляры  $MA_1$  и  $MB_1$  к сторонам  $BC$  и  $AC$ . Точки  $P$  и  $Q$  — середины отрезков  $AB$  и  $A_1B_1$  соответственно. Докажите, что  $\angle PQM = 90^\circ$ ;
10. Даны два одинаково ориентированных квадрата  $OABC$  и  $OA_1B_1C_1$ . Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

\* \* \*

11. Прямая, проходящая через одну из точек пересечения двух окружностей, пересекает их вторично в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Докажите, что угол между касательными, проведёнными к окружностям в точках  $A$  и  $B$  не зависит от выбора секущей  $AB$ .
12. В треугольнике  $ABC$  ( $AC > CB$ ) касательная в точке  $C$  к описанной окружности пересекает прямую  $AB$  в точке  $D$ . Пусть  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $BD$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что биссектриса угла  $ADC$  образует равные углы с прямыми  $AN$  и  $CM$ .
13. Дана окружность  $\omega$  и точка  $M$ . Найдите геометрическое место образов точки  $M$  при повороте относительно точки  $P$  окружности  $\omega$  на фиксированный угол  $\alpha$ .

Фамилия, Имя	1	2	а	2	б	2	в	2	г	2	д	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1. Андреев Валентин																							
2. Большаков Иван																							
3. Гайворонский Андрей																							
4. Говорухин Ярослав																							
5. Дегтярев Федор																							
6. Денисенко Анна																							
7. Зайцев Андрей																							
8. Карпов Андрей																							
9. Константиновский Никита																							
10. Левинсон Татьяна																							
11. Луценко Михаил																							
12. Мирошниченко Вероника																							
13. Нагайко Иван																							
14. Назаров Борис																							
15. Парубченко Александр																							
16. Перунов Иван																							
17. Пчелина Дарья																							
18. Рудько Юрий																							
19. Скурида Василий																							
20. Смык Екатерина																							
21. Фельдшерев Святослав																							
22. Чибрикин Гимфей																							
	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	