

Определение. Полярным преобразованием (относительно некоторой окружности $\omega(O, R)$) называется преобразование плоскости, при котором каждой точке A , кроме точки O , ставится в соответствие её поляр a , и каждой прямой, кроме проходящих через O , ставится в соответствие её полюс. Причем точкам прямой a соответствуют прямые, проходящие через точку A .

Определение. Принцип двойственности. Для любой конфигурации точек и прямых, в которой определенные точки лежат на определенных прямых существует двойственная её конфигурация прямых и точек, в которой определенные прямые проходят через определенные точки.

Словарик.

точка	прямая
лежит на	проходит через
прямая, проходящая через две точки	точка пересечения двух прямых
конкурентны	коллинеарны
полюс	поляр
касательная	точка касания

ТЕОРЕМА 1. (Брианшона) Во всяком шестиугольнике, описанном около окружности, прямые, соединяющие противоположные вершины пересекаются в одной точке.

1°. Сформулируйте утверждение, двойственное теореме Брианшона. У вас получится **теорема Паскаля**, докажите её.

2. Верно ли утверждение предыдущей задачи, если вместо выпуклого шестиугольника взять произвольную замкнутую шестизвенную ломаную, вписанную в окружность?

3. Касательные в вершинах неравностороннего треугольника к описанной около него окружности пересекают прямые, содержащие противоположные стороны этого треугольника в трех точках, лежащих на одной прямой (*прямой Паскаля* для треугольника).

4. Даны пять точек некоторой окружности. С помощью одной линейки постройте шестую точку этой окружности.

5. Даны треугольник ABC и некоторая точка T . Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки T на прямые AB и AC соответственно, а R и S — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые CT и BT соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC .

6. Точка M лежит на описанной окружности треугольника ABC , R — произвольная точка. Прямые AR , BR и CR пересекают описанную окружность в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Докажите, что точки пересечения прямых MA_1 и BC , MB_1 и CA , MC_1 и AB лежат на одной прямой, проходящей через точку R .

7. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 , биссектрисы AA_2 и BB_2 . Вписанная окружность касается сторон BC и AC в точках A_3 и B_3 соответственно. Докажите, что прямые A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 пересекаются в одной точке или параллельны.

8. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна ее диаметру AB , а хорда AE делит пополам радиус OC . Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC .