Определение. Точки A и B называют *сопряженными* относительно окружности $\omega(O,R)$, если $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=R^2$

1. Даны окружность $\omega(O,R)$ и точка A. Постройте на прямой OA точку B, сопряженную A, относительно ω.

2. Даны окружность $\omega(O,R)$ и точка A. Найдите геометрическое место точек, сопряженных A относительно ω. Разберите все случаи взаимного расположения точки A и окружности.

Определение. ГМТ из задачи 2 называется *полярой* точки A относительно окружности ω. Точка A называется *полюсом* этой поляры.

Замечание 1. Из задач 1 и 2 следует, что поляра точки A относительно окружности $\omega(O,R)$ — это прямая, проходящая через инверсный образ точки A относительно ω, перпендикулярно OA.

3. Докажите, что один из углов между полярами точек A и B относительно окружности $\omega(O,\ R)$ равен углу AOB.

4. Докажите, что диаметрально противоположные точки одной окружности сопряжены относительно некоторой окружности тогда и только тогда, когда эти окружности перпендикулярны.

5. Даны точка A и её поляра a. Докажите, что поляра каждой точки $B\in a$ проходит через точку A.

6. Постройте полюс данной прямой относительно данной окружности.

Определение. В условиях задачи 5, пусть b — поляра точки B, C — точка пересечения a и b. Треугольник ABC называется *автополярным*, потому что его противоположные вершина и сторона являются полюсом и полярой друг друга.

7. Докажите, что автополярный треугольник — тупоугольный, причем вершина тупого угла лежит внутри окружности, а остальные две вершины — вне.

8. Любой тупоугольный треугольник имеет единственную *полярную окружность* (окружность, относительно которой он является автополярным). Докажите это, найдите центр и радиус этой окружности.

9. Докажите, что точки A и B сопряжены относительно окружности тогда и только тогда, когда квадрат расстояния между ними равен сумме их степеней относительно этой окружности.

10. Докажите, что прямоугольник с центром в точке O при полярном преобразовании относительно $\omega(O,\ R)$ переходит в ромб.

11*. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, M — точка пересечения диагоналей, N — точка пересечения продолжений противоположных сторон AB и CD. Из точки N к окружности проведены касательные NK и NP. Докажите, что точки $M,\ K,\ P$ лежат на одной прямой.

Замечание 2. Используя понятие поляры задачу 11 можно переформулировать: точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника лежит на поляре точки пересечения его противоположных сторон. Или так: четырехугольник вписан в окружность. Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения его противоположных сторон и точке пересечения диагоналей является автополярным относительно этой окружности.

12. Постройте поляру точки A относительно окружности $\omega(O,\ R)$ с помощью одной линейки.

13. Постройте касательную из данной точки к данной окружности с помощью одной линейки.