Симметрии

1. На плоскости даны точки O, M и прямая l, проходящая через точку O. Прямую l повернули вокруг точки O на угол α против часовой стрелки, получив прямую l_1. Докажите, что точка, симметричная точке M относительно прямой l_1, получается из точки, симметричной M относительно l, поворотом вокруг точки O на угол 2α против часовой стрелки.

2. Из точки O на плоскости выходит $2n$ прямых. Всегда ли они служат серединными перпендикулярами к сторонам некоторого $2n$-угольника?

3. Дан вписанный $2n$-угольник с углами $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_{2n}$. Докажите, что $\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_{2n-1}=\alpha_2+\alpha_4+\cdots+\alpha_{2n}$. Верно ли обратное?

4. На плоскости даны прямые $l_1,\ l_2,\ldots,\ l_{2n}$, пересекающиеся в одной точке. Блоха сидит в некоторой точке M плоскости и прыгает через прямую l_1 в точку M_1 так, что точки M и M_1 симметричны относительно прямой l_1, далее — через прямую l_2 и т.д. Докажите, что если через $2n$ прыжков блоха оказалась в точке M, то, начиная движение из любой точки плоскости, через $2n$ прыжков блоха окажется на прежнем месте.

5*. Докажите, что три прямые, симметричные прямой, проходящей через ортоцентр треугольника, относительно его сторон, пересекаются в одной точке.

6. На плоскости даны две параллельные прямые l и m. Их параллельно перенесли на некоторое расстояние h, получив прямые l_1 и m_1. Докажите, что композиция симметрий относительно прямых l и m и композиция симметрий относительно l_1 и m_1 — одно и то же преобразование.

7. Докажите, что композиция трёх симметрий относительно прямых l_1, l_2 и l_3 есть осевая симметрия.

8. Докажите, что композиция параллельного переноса в направлении, перпендикулярном некоторой прямой, и симметрии относительно этой прямой есть осевая симметрия.

9. Существует ли а) ограниченная; б) неограниченная фигура на плоскости, имеющая среди своих осей симметрии две параллельные, несовпадающие прямые?

10. Докажите, что композиция n осевых симметрий относительно прямых $l_1,\ l_2,\ldots,\ l_n$, проходящих через точку O есть

а) поворот, если n - четно (параллельный перенос, если все прямые параллельны);

б) осевая симметрия, если n - нечетно.

11. Пусть дан разносторонний треугольник ABC, A_1, B_1, C_1 — точки касания его вписанной окружности со сторонами BC, AC, AB соответственно. A_2, B_2, C_2 — точки, симметричные точкам A_1, B_1, C_1 относительно биссектрис соответствующих углов треугольника ABC. Докажите, что $A_2C_2||AC$.

12. Из центра окружности проведено n прямых (n - нечетно). Постройте вписанный в окружность n-угольник, для которого данные прямые являются серединными перпендикулярами.

13. Впишите в данную окружность n-угольник, стороны которого параллельны заданным n прямым.

14. Через центр O окружности проведено n прямых. Постройте описанный около окружности n-угольник, вершины которого лежат на этих прямых.

Повороты

15. С помощью циркуля и линейки постройте многоугольник с нечетным числом сторон, зная середины его сторон.

16. Докажите, что композиция двух поворотов на углы, в сумме не кратные 360°, является поворотом. В какой точке находится его центр и чему равен угол поворота? Исследуйте также случай, когда сумма углов поворотов кратна 360°.

17. Дан треугольник ABC на его сторонах AB и BC внешним образом построены квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков AC и MQ образуют квадрат.

18. На сторонах произвольного выпуклого четырехугольника внешним образом построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов равны и перпендикулярны.

19*. На сторонах произвольного треугольника построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.

20. Круг поделили хордой AB на два сегмента и один из них повернули на некоторый угол. Пусть при этом повороте точка B перешла в точку D. Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BD перпендикулярны друг другу.