**Определение.** Гомотетией с центром $O$ и коэффициентом $k$ называется преобразование плоскости, при котором каждой точке точке $M$ ставится в соответствие точка $M'$ на луче $OM$, причем $\frac{OM'}{OM} = k$.

Теорема 1. *Прямая не проходящая через центр гомотетии отображается на параллельную прямую.*

Теорема 2. *Композиция двух гомотетий с коэффициентами $k_1$ и $k_2$ ($k_1k_2 \neq 1$) является гомотетией с коэффициентом $k_1k_2$, причем её центр лежит на прямой, соединяющей центры этих гомотетий.*

1. На основаниях трапеции как на сторонах построены во внешнюю сторону два квадрата. Докажите, что отрезок, соединяющий центры квадратов, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

2. Постройте трапецию, если известны отношение её оснований $\frac{a}{b}$, два угла при одном из оснований и высота.

3. Даны два отрезка, лежащие либо на одной, либо на параллельных прямых. Сколько существует гомотетий, переводящих эти отрезки друг в друга?

4. Докажите, что две касающиеся окружности гомотетичны относительно их точки касания.

5. Сколько существует гомотетий переводящих друг в друга две окружности?

6. Найдите геометрическое место середин отрезков, соединяющих данную точку, лежащую вне данной окружности, с точками этой окружности.

7. Постройте хорду данной окружности, которую два данных радиуса разделили бы на три равные части.

8. Через точку $M$, лежащую на данной окружности проведите хорду, которая делилась бы пополам данной хордой $AB$.

9. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через данную точку внутри угла.

10. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

11. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данных прямой и окружности.

12. Впишите в данный угол окружность, касающуюся данной окружности.

13. В данный треугольник впишите квадрат так, чтобы одна сторона квадрата была расположена на стороне треугольника, а остальные вершины квадрата лежали бы на двух других сторонах треугольника.

14. Два треугольника $ABC$ и $A_1B_1C_1$, площади которых равны $S$ и $S_1$, расположены так, что лучи $AB$ и $A_1B_1$, $BC$ и $B_1C_1$, $CA$ и $C_1A_1$ параллельны, но противоположно направлены. Найдите площадь треугольника с вершинами в серединах отрезков $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$.

15. На окружности фиксированы точки $A$ и $B$, а точка $C$ движется по этой окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников $ABC$.

16. В данный треугольник впишите другой треугольник, стороны которого соответственно параллельны трем данным прямым.

17. Постройте треугольник $ABC$, если заданы его наименьший угол $A$ и отрезки $d = AB - BC$ и $e = AC - BC$.

18. (*Прямая Эйлера.*) Докажите, что точка пересечения медиан, ортоцентр и центр описанной окружности треугольника лежат на одной прямой.

19. Медианы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$, $P$ — произвольная точка плоскости. Прямая $l_a$ проходит через точку $A$ параллельно $PA_1$, прямые $l_b$ и $l_c$ определяются аналогично. Докажите, что а) прямые $l_a$, $l_b$ и $l_c$ пересекаются в одной точке $Q$; б) точка $M$ лежит на отрезке $PQ$, причём $PM : MQ = 1 : 2$.

20. Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается стороны $AC$ в точке $D$, $DM$ — её диаметр. Прямая $BM$ пересекает сторону $AC$ в точке $K$. Докажите, что $AK = CD$.

21. В треугольник $ABC$ через середину $M$ стороны $BC$ и центр $O$ вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая $MO$, которая пересекает высоту $AH$ в точке $E$. Докажите, что отрезок $AE$ равен радиусу вписанной окружности.

22. Рассмотрим всевозможные пары касающихся внешним образом окружностей, вписанных в круговой сегмент. Докажите, что общие внутренние касательные каждой такой пары проходят через одну точку.

23. Равные окружности $s_1$ и $s_2$ касаются внутренним образом окружности $s$ в точках $A_1$ и $A_2$. Пусть $C$ — некоторая точка окружности $s$, прямые $A_1C$ и $A_2C$ пересекают окружности $s_1$ и $s_2$ в точках $B_1$ и $B_2$ соответственно. Докажите, что $B_1B_2 || A_1A_2$.

24. Даны три окружности $s_1$, $s_2$, $s_3$ расположенные вне друг друга. Пусть $A$, $B$, $C$ — точки пересечения общих внешних касательных. Докажите, что точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой.

25. Две окружности радиусов $r$ и $R$ ($r < R$) касаются внешним образом. Прямая касается этих окружностей в точках $M$ и $N$. В точках $A$ и $B$ окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые $AB$ и $MN$ пересекаются в точке $C$. Из точки $C$ проведена касательная $CD$ к третьей окружности. Найдите $CD$.