В этом листке нам будет удобно иметь дело с *расширенной плоскостью,* то есть к обычной плоскости мы добавим одну точку, которую будем называть *бесконечно удаленной* и обозначать O_∞.

Определение. *Инверсией* относительно данной окружности с центром O и радиусом R называется отображение расширенной плоскости на себя, при котором точка O переходит в точку O_∞, а любая другая точка M – в такую точку M' на луче OM, что $OM' = \frac{R^2}{OM}$.

Ясно, что инверсия есть взаимно-однозначное отображение расширенной плоскости на себя. Причем инверсия — это инволюционное преобразование.

Задачи

1. Докажите, что при инверсии

а) точки, расположенные на окружности инверсии, переходят сами в себя (окружность инверсии является множеством неподвижных точек преобразования);

б) точки, лежащие внутри окружности инверсии, переходят в точки, лежащие вне этой окружности, и наоборот (то есть других неподвижных точек нет).

2. Докажите, что при инверсии

а) прямая, проходящая через центр инверсии переходит сама в себя;

б) прямая, не проходящая через центр инверсии переходит в окружность, проходящую через центр инверсии;

в) окружность, проходящая через центр инверсии переходит в прямую, не проходящую через центр инверсии.

3. Докажите, что при инверсии окружность, не проходящая через центр инверсии переходит в окружность, также не проходящую через центр инверсии.

4. Известно, что при инверсии относительно некоторой окружности точки A и B данной окружности S переходят друг в друга. Докажите, что тогда окружность S переходит сама в себя.

5. Постройте (циркулем и линейкой) образ данной точки при инверсии относительно данной окружности.

6. Докажите, что при инверсии сохраняется касание прямых и окружностей, если только точка касания не совпадает с центром инверсии (а что будет в этом случае?).

7. Даны четыре окружности, каждая из которых касается внешним образом двух других. Докажите, что четыре точки касания лежат на одной окружности.

8. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся а) данной прямой; б) данной окружности.

9. Через данную точку проведите окружность, касающуюся данных а) прямой и окружности; б) двух окружностей.

10. (*Теорема Птолемея.*) Докажите, что в любом вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

11. (*Задача Аполлония.*) Постройте окружность, касающуюся трёх данных окружностей.

Определение. Углом между окружностями, пересекающимися в точке A, называется угол между касательными к этим окружностям, проведенными в точке A.

12. Докажите, что при инверсии сохраняется угол между окружностями (между окружностью и прямой, между двумя прямыми).

13. Докажите, что две непересекающиеся окружности (или окружность и прямую) можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

14. Проведите через данную точку окружность, перпендикулярную двум данным окружностям.

15. (*Арбелос Архимеда.*) Точки A, C и B последовательно расположены на одной прямой. Полуокружности с диаметрами AB, AC и BC расположены по одну сторону от прямой AB. Рассмотрим окружность радиуса r, касающуюся всех трех полуокружностей. Найдите расстояние от центра этой окружности до прямой AB.

16. С помощью одного циркуля постройте отрезок а) в два раза длиннее данного; б) в n раз длиннее данного.

17. С помощью одного циркуля разделите отрезок а) пополам; б) на n равных частей.

18. С помощью одного циркуля постройте образ данной точки при инверсии с данным центром и радиусом.

19. С помощью одного циркуля постройте центр данной окружности.

20. (*Теорема Фейербаха.*) Докажите, что окружность, проходящая через середины трёх сторон треугольника, касается его вписанной и трёх вневписанных окружностей.