Определение. Поворотом относительно точки O на угол α (по часовой стрелке либо против) называется такое преобразование плоскости, при котором каждая точка X переходит в точку X' так, что $\angle XOX' = \alpha$, причём угол измеряется либо по часовой стрелке, либо против соответственно.

Теорема 1. *Композиция двух осевых симметрий с осями, образующими угол α есть поворот на угол 2α вокруг точки пересечения данных прямых.*

Задачи

1. Докажите, что треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на $60°$ (либо по часовой стрелке, либо против) относительно точки A, вершина B переходит в вершину C.

2. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата образуют квадрат.

3. Пусть две прямые пересекаются в точке O под углом α. Докажите, что при повороте на угол α (в одном из направлений) относительно произвольной точки, отличной от O, одна из этих прямых перейдет в прямую, параллельную другой.

4. Пусть M и N — середины сторон CD и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$. Найдите угол между прямыми AM и BN.

5. Шестиугольник $ABCDEF$ — правильный, K и M — середины отрезков BD и EF. Докажите, что треугольник AKM — правильный.

6. Постройте а) равносторонний треугольник; б) квадрат; так, чтобы его вершины лежали на трёх параллельных прямых.

7. Точка P лежит внутри равностороннего треугольника ABC. Докажите, что существует треугольник стороны которого равны отрезкам PA, PB и PC.

8. Впишите квадрат в данный параллелограмм.

9. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; M и P — середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM — равносторонний.

10. Дан ромб $ABCD$ с острым углом A, равным $60°$. Прямая MN отсекает от сторон AB и BC отрезки MB и NB, сумма которых равна стороне ромба. Найдите углы треугольника MDN.

11. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята произвольная точка M. Докажите, что $AM = BM + CM$.

12. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

13. Два квадрата $BCDA$ и $BKMN$ имеют общую вершину B. Докажите, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBN лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке.)

14. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники ABC_1, AB_1C и A_1BC. Пусть P и Q — середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1. Докажите, что треугольник APQ — правильный.

15. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P. Из вершины A опущен перпендикуляр на BP, из B — на CP, из C — на DP, из D — на AP. Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

16. Из вершины A квадрата $ABCD$ внутрь квадрата проведены два луча, на которые опущены перпендикуляры Bk, BL, DM, DN из вершин B и D. Докажите, что отрезки KL и MN равны и перпендикулярны друг другу.

17. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники ABC_1, AB_1C и A_1BC, и проведены отрезки AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что эти отрезки равны между собой.

18. Точка M лежит внутри квадрата $ABCD$, причем треугольник AMD — равносторонний. Точка K лежит вне квадрата, причем треугольник CKD — равносторонний. Докажите, что точки B, M и K лежат на одной прямой.

19. Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$, причем $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Найдите угол APB.

20*. Дан треугольник ABC. На его сторонах AB и BC построен внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

21*. (*задача Ферма*) Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.