

1. Докажите, что диагональ ромба является его осью симметрии.
2. Существует ли фигура, не имеющая осей симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?
3. Существует ли фигура, не имеющая ни осей, ни центров симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?
4. Найдите координаты точки, симметричной точке  $M(x; y)$  относительно а) оси ординат; б) оси абсцисс; в) прямой  $x = a$ ; г) прямой  $y = b$ ; д) прямой  $y = x$ ; е) прямой  $y = -x$ .
5. Фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии. Докажите, что она имеет центр симметрии.
6. Существует ли фигура, имеющая ровно две оси симметрии, но не имеющая центра симметрии.
7. Четырёхугольник имеет ровно две оси симметрии. Верно ли, что он либо прямоугольник, либо ромб?
8. Может ли пятиугольник иметь ровно две оси симметрии?
9. Может ли фигура иметь центр симметрии и ровно одну ось симметрии?
10. Докажите, что всякий выпуклый четырёхугольник с осью симметрии либо вписанный, либо описанный.
11. Точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны от прямой  $l$ . Постройте на этой прямой точку  $M$  так, чтобы прямая  $l$  делила угол  $AMB$  пополам.
12. Внутри острого угла даны точки  $M$  и  $N$ . Как из точки  $M$  направить луч света, чтобы он, отразившись последовательно от сторон угла, попал в точку  $N$ ?
13. Внутри острого угла даны точки  $M$  и  $N$ . Постройте на сторонах угла точки  $K$  и  $L$  так, чтобы периметр четырёхугольника  $MKLN$  был наименьшим.
14. Постройте треугольник по данным серединам двух его сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон.
15. Точки  $M$  и  $N$  расположены по разные стороны от прямой  $l$ . Постройте на прямой  $l$  такую точку  $K$ , чтобы разность отрезков  $MK$  и  $NK$  была наибольшей.
16. На плоскости дана прямая  $l$  и две точки  $A$  и  $B$  по одну сторону от неё. На прямой  $l$  выбрана точка  $M$ , сумма расстояний от которой до точек  $A$  и  $B$  наименьшая, и точка  $N$ , для которой  $AN = BN$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной окружности.
17. Постройте четырёхугольник  $ABCD$  по четырем сторонам, если известно, что его диагональ  $AC$  является биссектрисой угла  $A$ .
18. Постройте треугольник, если дана его вершина, и три прямые, на которых лежат его биссектрисы.
19.  $AD$  — биссектриса угла  $A$  в треугольнике  $ABC$ . Через точку  $A$  проведена прямая, перпендикулярная к  $AD$ , и из вершины  $B$  опущен перпендикуляр  $BB_1$  на эту прямую. Докажите, что периметр треугольника  $BB_1C$  больше периметра треугольника  $ABC$ .
20. Среди всех треугольников  $ABC$  с данным углом  $C$  и стороной  $AB$  найдите треугольник с наибольшим возможным периметром.
21. Найдите среди всех треугольников с данным основанием и данной площадью треугольник наименьшего периметра.
22. Постройте остроугольный треугольник по основаниям двух его высот и прямой, содержащей третью высоту.
23. Постройте треугольник по центру его описанной окружности и двум прямым, на которых лежат высоты.
24. (Задача Фаньяно) Впишите в данный остроугольный треугольник треугольник наименьшего периметра.
25. На плоскости заданы две пересекающиеся прямые, и на них отмечено по одной точке ( $D$  и  $F$ ). Постройте треугольник  $ABC$ , у которого биссектрисы  $CD$  и  $AF$  лежат на данных прямых, а их основания — данные точки  $D$  и  $F$ .
26. Дана прямая  $l$  и точки  $A$  и  $B$  по одну сторону от неё. Пусть  $A_1$  и  $B_1$  проекции этих точек на прямую  $l$ . Постройте на прямой  $l$  такую точку  $M$ , что  $\angle AMA_1 = 2\angle BMB_1$ .