Определение. Движение — это преобразование, сохраняющее расстояние между точками.

Теорема 1. *Композиция двух движений является движением.*

Теорема 2. *При движении прямые переходят в прямые, углы — в равные им углы, параллельные прямые — в параллельные прямые. Движение сохраняет отношение «лежать между» для трёх точек прямой.*

Теорема 3. *Любое движение плоскости однозначно задаётся образами трёх точек плоскости, не лежащих на одной прямой.*

Задачи

1. Докажите, что при центральной симметрии луч переходит в противоположно направленный с ним луч.

2. Докажите, что четырехугольник имеющий центр симметрии является параллелограммом.

3. На противоположных сторонах параллелограмма как на сторонах построены вне параллелограмма два квадрата. Докажите, что прямая, соединяющая их центры, проходит через центр параллелограмма.

4. Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

5. Найдите координаты образа точки $M(x; y)$ при симметрии относительно а) начала координат; б) точки $A(a; b)$.

6. Пусть a и b — некоторые числа. Каждой точке $M(x; y)$ координатной плоскости ставим в соответствие точку $M(x'; y')$, для которой $x' = 2a - x$ и $y' = 2b - y$. Докажите, что это соответствие есть центральная симметрия плоскости. Каковы координаты центра симметрии.

7. Выпуклый многоугольник имеет центр симметрии. Докажите, что сумма его углов делится на 360°.

8. Дан параллелограмм и точка M на одной из его сторон. Постройте ромб, одна вершина которого — точка M, а остальные три вершины лежат на трёх других сторонах параллелограмма.

9. Проведите через общую точку A двух окружностей S_1 и S_2 прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

10. Через данную точку проведите прямую, отрезок которой, заключённый между двумя данными окружностями, делился бы этой точкой пополам.

11. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M. Через точки A, B, C и D проведены прямые параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что они пересекаются в одной точке.

12. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите что он имеет центр симметрии.

13. При симметрии относительно точки пересечения медиан треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ при пересечении образуют шестиугольник $KLMNOP$. Докажите, что диагонали KN, LO и MP этого шестиугольника пересекаются в одной точке и найдите стороны шестиугольника, если стороны треугольника ABC равны a, b и c.

14. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, параллельными сторонам, равны между собой.

15. O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOB и COD касаются.

* * *

16. Существуют фигуры, имеющие бесконечное множество центров симметрий (например, полоса между двумя параллельными прямыми). Может ли фигура иметь более одного, но конечное количество центров симметрии?

17. (*Теорема Монжа*) Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

18. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина отрезка CD. Докажите, что угол MKN равен 90°.(Можно считать, что точки C и D лежат по разные стороны от точки A).

19. В окружности заданы две произвольные хорды AB и CD и точка P на хорде CD. Найдите на окружности такую точку M, чтобы прямые AM и BM высекали на хорде CD отрезок, делящийся точкой P пополам.